MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a IX-a

(3 ore/săptămână)

Soluții și bareme

Problema 1.

Mingea de tenis trimisă de racheta unui sportiv pe un teren de sport lovește terenul în punctele $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ prin sărituri. Punctele $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ sunt coliniare în această ordine. Lungimea unei sărituri este considerată ca fiind distanța dintre două puncte consecutive în care mingea lovește terenul. Lungimea primei sărituri este de $80\,m$ și reprezintă distanța dintre punctele A_0 și A_1. Începând cu a doua săritură lungimea fiecărei sărituri este jumătate din lungimea precedentei sărituri.

a) Determinați distanța dintre punctele A_0 și A_5.

b) Mingea poate lovi terenul la o distantă de exact $158,75\,m$ de la punctul A_0? Justificați răspunsul.

Daniel Nut

Soluție

a) $D = |A_0A_1| + |A_1A_2| + |A_2A_3| + |A_3A_4| + |A_4A_5| = 80 + 40 + 20 + 10 + 5 = 155\,m$ **1p**

b) Din formula sumei progresiei geometrice obținem ecuația:

$$80 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 158,75$$

..... **2p**

Prin transformări echivalente ajungem la ecuația: $2^n = 128$. **2p**

Soluția ecuației este $n = 7 \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă, că după 7 sărituri mingea lovește terenul la o distanță de $158,75\,m$ de la punctul A_0. ..... **2p**

Problema 2.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir în progresie aritmetică cu $a_7 = 20, a_{10} = 29$ și fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x+1$.

a) Determinați primul termen și rația progresiei aritmetice.

b) Calculați valoarea lui T, unde:

$$T = f(a_1) + f(a_4) + f(a_7) + \ldots + f(a_{40}).$$

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2 + 8 + 14 + \ldots + x = 1180.$$

Daniel Nut

Soluție

a) Notăm cu r rația progresiei aritmetice. Atunci: $r = \frac{a_{10} - a_7}{3} = 3$. **1p**

$a_1 = a_7 - 6 \cdot r = 2$. **1p**

b) $T = 2(a_1 + a_4 + \ldots + a_{40}) + 14 = 2\left[14a_1 + 3r\left(1 + 2 + \ldots + 13\right)\right] + 14 =$

$= 2 \cdot \left(28 + 9 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2}\right) + 14 = 1708$. **2p**

c) Observăm că termenii sumei din partea stângă a ecuației formează o progresie aritmetică cu primul termen 2 și rația 6. Fie $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x = 2+6(k-1)$. Folosind formula sumei progresiei aritmetice obținem ecuația:

$$\frac{[4+6(k-1)]k}{2}=1180 \Longleftrightarrow [2+3(k-1)]k=1180 \Longleftrightarrow 3k^2-k-1180=0$$

.....**1p**

Se obțin rădăcinile $k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{14161}}{6}=\frac{1\pm 119}{6}$. Constatăm că $k_1=-\frac{59}{3}\notin\mathbb{N}^*$ și $k_2=20\in\mathbb{N}^*$. Deci se acceptă doar soluția k_2. Drept urmare $x=2+6\cdot(20-1)=116$.....**2p**

Problema 3.

Se consideră paralelogramul $ABCD$ și $\{O\}=AC\cap BD$. Fie punctele P și Q astfel încât $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

a) Desenați figura corespunzătoare datelor problemei.

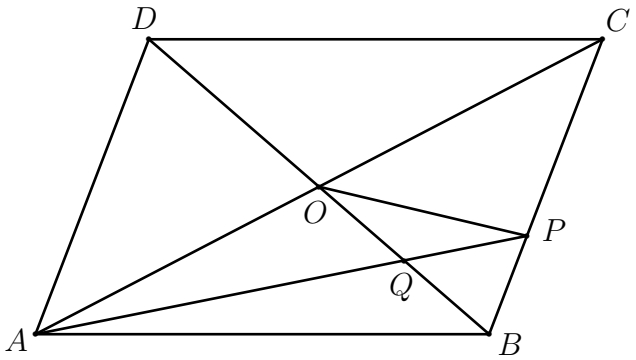
b) Dacă $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$, exprimați vectorii $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AP}$ și $\overrightarrow{OP}$ în funcție de $\overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{b}$.

c) Demonstrați că punctele A, Q și P sunt coliniare.

Daniel Nut

Soluție

a)



.....**1p**

b) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)$ **1p**

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}$ **1p**

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{6}\overrightarrow{b}$ **1p**

c) Punctele A, Q și P sunt coliniare dacă și numai dacă $\exists\alpha\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{AQ}=\alpha\overrightarrow{AP}$.....**1p**

$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{a}+\frac{1}{4}\overrightarrow{b}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AP}$, ceea ce înseamnă că punctele A, Q și P sunt coliniare.....**2p**

Problema 4.

Dacă $[u]$ reprezintă partea întreagă a numărului real u, arătați că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$\left[\frac{2-x}{2}\right]+\left[\frac{1-x}{2}\right]+\left[\frac{x-1}{2}\right]+\left[\frac{x-2}{2}\right]\leq -1.$$

Csaba Zajzon

Soluție

Transformăm inegalitatea în forma:

$$\left[-\frac{x-2}{2}\right]+\left[\frac{x-2}{2}\right]+\left[-\frac{x-1}{2}\right]+\left[\frac{x-1}{2}\right]\leq -1,$$

și constatăm că $-\dfrac{x-2}{2}$ este opusul lui $\dfrac{x-2}{2}$, iar $-\dfrac{x-1}{2}$ este opusul lui $\dfrac{x-1}{2}$. **1p**

Dacă $u\in\mathbb{Z}$, atunci $[u]+[-u]=u+(-u)=0$. **1p**

Dacă $u\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, atunci:

$$[u]<u<[u]+1\Longleftrightarrow -[u]>-u>-[u]-1,$$

ceea ce înseamnă că $[-u]=-[u]-1$. Drept urmare $[u]+[-u]=[u]+(-[u]-1)=-1$. **1p**

Astfel am obținut că $\left[-\dfrac{x-2}{2}\right]+\left[\dfrac{x-2}{2}\right]\leq 0$ și $\left[-\dfrac{x-1}{2}\right]+\left[\dfrac{x-1}{2}\right]\leq 0$. **1p**

Presupunem prin absurd că $\dfrac{x-1}{2}\in\mathbb{Z}$ și $\dfrac{x-2}{2}\in\mathbb{Z}$. De aici rezultă că $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{1}{2}\in\mathbb{Z}$, ceea ce este evident fals. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și cel puțin unul din numerele $\dfrac{x-1}{2}$ și $\dfrac{x-2}{2}$ aparține mulțimii $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. **2p**

În consecință cel puțin una din sumele $\left[-\dfrac{x-2}{2}\right]+\left[\dfrac{x-2}{2}\right]$ respectiv $\left[-\dfrac{x-1}{2}\right]+\left[\dfrac{x-1}{2}\right]$ este mai mică sau egală cu -1, iar cealaltă sumă este mai mică sau egală cu 0, adică:

$$\left[\frac{2-x}{2}\right]+\left[\frac{1-x}{2}\right]+\left[\frac{x-1}{2}\right]+\left[\frac{x-2}{2}\right]\leq -1+0=-1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

..... **1p**