CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa zonală, 11 februarie 2023
Clasa a IX-a
(4 ore/săptămână)
Soluții și bareme

Problema 1.
Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$2021x - 2019 = \{x\}^2 + 2023\{x\}.$$

Mátyás Mátyás

Soluție

$$2021x - 2019 = \{x\}^2 + 2023\{x\} \iff 2021[x] - 2019 = \{x\}^2 + 2\{x\} \iff [x] = \frac{\{x\}^2 + 2\{x\} + 2019}{2021}$$

.....**2p**
Din $\{x\} \in [0, 1)$ rezultă, că:

$$\frac{2019}{2021} \leq [x] < \frac{2022}{2021},$$

ceea ce înseamnă că $[x] = 1$.....**1p**
Notăm $\{x\}$ cu y și obținem ecuația $y^2 + 2y - 2 = 0$. Soluțiile ecuației sunt $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$.....**1p**
$-1 - \sqrt{3} \notin [0, 1)$ și $-1 + \sqrt{3} \in [0, 1)$. Drept urmare condiția $\{x\} \in [0, 1)$ e satisfăcută numai dacă $\{x\} = -1 + \sqrt{3}$.....**2p**
În concluzie unica soluție a ecuației este: $x = [x] + \{x\} = 1 + (-1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$.....**1p**

Problema 2.
Arătați că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Csaba Zajzon

Soluție
Ridicând la pătrat inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică obținem:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{ab}\right)^2 \Longrightarrow a + b \geq \frac{4ab}{a+b} \Longrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{a+b}{4ab} = \frac{a}{4ab} + \frac{b}{4ab} = \frac{1}{4b} + \frac{1}{4a}.$$

.....**4p**
Analog obținem: $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{4c} + \frac{1}{4b}$ și $\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4c}$. **1p**
Adunând inegalitățile obținute deducem inegalitatea din enunț:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4c} = \frac{2}{4a} + \frac{2}{4b} + \frac{2}{4c} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

.....**2p**

Observație: O altă soluție a problemei din enunți este prezentată.

Din inegalitea dintre media aritmetică și media geometrică: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Longleftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$. . . **1p**

Analog obținem: $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}}$ și $\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2\sqrt{ca}}$ **1p**

Adunând inegalitățile obținute deducem inegalitatea din enunț:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}+\frac{1}{2\sqrt{bc}}+\frac{1}{2\sqrt{ca}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2b}}+\frac{1}{\sqrt{2b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2c}}+\frac{1}{\sqrt{2c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}}$$
$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^2 = \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}.$$

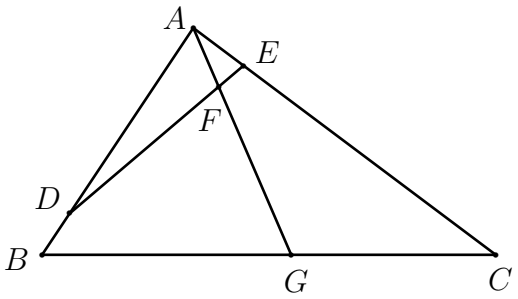
. . . . . **5p**

Problema 3.

Fie numerele reale $x > 0$ și $y > 0$. În triunghiul ABC punctele D și E se află pe laturile AB respectiv AC, astfel încât $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{x}$ și $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{y}$. Fie punctul F pe segmentul DE, astfel încât $\frac{DF}{EF} = y+1$ și fie $\{G\} = AF \cap BC$. Arătați că $BG > CG$.

Mátyás Mátyás

Soluție



Din $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{x}$ și $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{y}$ obținem $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{AB}$ respectiv $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{y+1}\overrightarrow{AC}$. Din $\frac{DF}{EF} = y+1$ rezultă că $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{y+2}\overrightarrow{AD} + \frac{y+1}{y+2}\overrightarrow{AE}$. Drept urmare $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{(y+2)(x+1)}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{y+2}\overrightarrow{AC}$. **2p**

Punctele A, F și G fiind colineare există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\overrightarrow{AG} = t \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{t}{(y+2)(x+1)}\overrightarrow{AB} + \frac{t}{y+2}\overrightarrow{AC}$$

. . . . . **1p**

Fie $k = \frac{BG}{CG}$. Atunci: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$. **1p**

Descompunerea lui $\overrightarrow{AG}$ după $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ este unică, ceea ce înseamnă că:

$$\begin{cases} \frac{1}{k+1} = \frac{t}{(y+2)(x+1)} \Longrightarrow \frac{k}{k+1} = \frac{tk}{(y+2)(x+1)} \\ \frac{k}{k+1} = \frac{t}{y+2} \end{cases}.$$

Ca urmare: $\frac{tk}{(y+2)(x+1)} = \frac{t}{y+2} \Longrightarrow k = x+1$. **2p**

Ținând cont de faptul că $x > 0$, avem $\frac{BG}{CG} > 1$, adică $BG > CG$. **1p**

Problema 4.

Demonstrați că ecuația $x^2+px+q=0$ nu are soluții raționale dacă p și q sunt numere întregi impare.

GM S:L22.204

Soluție

Presupunem prin absurd că ecuația $x^2+px+q=0$ admite o soluție rațională. Această soluție poate fi scrisă în forma $\frac{a}{b}$, unde $a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0$ și cel puțin unul dintre a și b este impar. **1p**

Înlocuind în ecuație pe $\frac{a}{b}$ obținem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+p\frac{a}{b}+q=0\Longleftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+p\frac{a}{b}+q=0\Longleftrightarrow a^2+pab+qb^2=0.$$

..... **1p**

Distingem următoarele cazuri.

Dacă a este un număr par și b este un număr impar, atunci a^2 este par, pab este par și qb^2 este impar. Drept urmare $a^2+pab+qb^2$ este impar.

Dacă a este un număr impar și b este un număr par, atunci a^2 este impar, pab este par și qb^2 este par. Drept urmare $a^2+pab+qb^2$ este impar.

Dacă a şi b sunt două numere impare, atunci a^2 este impar, pab este impar și qb^2 este impar. Drept urmare $a^2+pab+qb^2$ este impar.

..... **3p**

Deci, $a^2+pab+qb^2$ este impar în toate cazurile posibile, ceea ce contrazice $a^2+pab+qb^2=0$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și ecuația $x^2+px+q=0$ nu are soluții raționale dacă p și q sunt numere întregi impare. **2p**