Al 25-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a X-a
(3 ore / săptămână)
Soluții și bareme

Problema 1.

Să se rezolve ecuația: $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{a}{x}$, a fiind un număr real.

Soluție

Condițiile: $x \neq 0$ și $a \neq 0$ 1 p

Condiția $x \in [-a, a] \setminus \{0\}$ 1 p

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}$$

După amplificare cu conjugata numitorului obținem că:

$$\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{a+x-a+x}=\frac{a}{x}$$

$$\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{2x}=\frac{a}{x}$$

$$(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2=2a$$

3 p

De unde se rezulte că $2\sqrt{(a-x)(a+x)}=\sqrt{a^2-x^2}=0$. 1 p

În fine obținem, că $x_1=-a, x_2=a$ 1 p

Problema 2.

Dacă z este un număr complex, astfel încât $|z| \leq \dfrac{1}{2}$, atunci să se arată, că:

$$|z^2+z+\frac{1}{4}| \leq 1$$

Soluție

$$z^2+z+\frac{1}{4}=\left(z+\frac{1}{2}\right)^2$$

2 p

$$\left|z^2+z+\frac{1}{4}\right| = \left|\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\right| = \left|z+\frac{1}{2}\right|^2$$

1 p

$$\left|z+\frac{1}{2}\right|^2 \leq \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

3 p

Finalizare:

$$\left|z^2+z+\frac{1}{4}\right| \leq 1$$

1 p

Problema 3.

Stabiliți domeniul maxim de definiție al următoarelor funcții:

a) $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x+2}$

b) $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x+1}(4-x^2)$

c) $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-cosx}$

Soluție

a) $\begin{cases} x^2-3 \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty) \\ x+2 \neq 0 \iff x \neq 2 \end{cases}$ 1 p

$D = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty) \setminus \{2\}$ 1 p

b) $\begin{cases} 4-x^2 > 0 \iff x \in (-2, 2) \\ x+1 > 0 \iff x > -1 \iff x \in (-1, +\infty) \\ x+1 \neq 1 \iff x \neq 0 \end{cases}$ 2 p

$D = (-2, 2) \cap (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ 1 p

c) $1 - \cos x \geq 0 \iff 1 \geq \cos x$ 1 p

Se știe, că $\cos x \in [-1, 1]$ pentru orice număr real x, de aceea $D = \mathbb{R}$ 1 p

Problema 4.

Se dă numerele reale $a \geq b > 1$. Să se determine valoarea maximă a expresiei:

$$E(a, b) = \log_{a^2} \frac{a^{2022}}{b^{2023}} + \log_{b^2} \frac{b^{2022}}{a^{2023}}$$

Soluție

$$\log_{a^2} \frac{a^{2022}}{b^{2023}} = log_{a^2} a^{2022} - log_{a^2} b^{2023} = 1011 - 2023 \cdot log_{a^2} b$$

$$\log_{b^2} \frac{b^{2022}}{a^{2023}} = log_{b^2} b^{2022} - log_{b^2} a^{2023} = 1011 - 2023 \cdot log_{b^2} a$$

2 p

De unde $E(a, b) = 2022 - 2023(log_{a^2} b + log_{b^2} a)$.

Dacă schimbăm bazele logaritmilor obținem că:

$$log_{b^2} a = \frac{log_b a}{log_b b^2} = \frac{log_b a}{2}$$

$$log_{a^2} b = \frac{log_a b)}{log_a a^2} = \frac{log_a b}{2}$$

2 p

$$E(a, b) = 2022 - 2023(log_{a^2} b + log_{b^2} a) = 2022 - \frac{2023}{2} (log_a b + log_b a)$$

. 1 p

Se știe, că $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pentru orice număr real pozitiv x, de aceea $log_a b + log_b a = log_a b + \frac{1}{log_a b} \geq 2$, din care $E(a, b) \geq 2022 - \frac{2023}{2} \cdot 2 = 2022 - 2023 = -1$. Deci valoarea maximă a expresiei este -1 și pentru $a = b$ o atinge. $a = b \iff log_a b + log_b a = 2 \iff E(a, b) = 2022 - 2023 = -1$ 2 p