Al 25-lea Concurs National de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici”

Etapa zonală, 11 februarie 2023

CLASA A XI-A

Soluții și bareme

Problema 1.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n+A^{n+2}=90A$.

S:L22.301 Supliment Gazeta Matematică

Soluție

$A^2=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&0&0\\6&0&6\end{pmatrix}=3A$, $A^3=\begin{pmatrix}9&0&9\\0&0&0\\18&0&18\end{pmatrix}=3^2A$ **2p**

Prin inducție matematică se demonstrează că: $A^n=3^{n-1}A$ **2p**

Se scrie ecuția: $A^n+A^{n+2}=90A$

$3^{n-1}A+3^{n+1}A=90A$

$3^{n-1}+3^{n+1}=90$ **1p**

$\frac{3^n}{3}+3^n\cdot 3=90\Leftrightarrow 3^n=27\Leftrightarrow n=3$ **2p**

Problema 2.

Demonstrați următoarea inegalitate:

$\begin{vmatrix}k&x&k-x\\k-x&k&x\\x&k-x&k\end{vmatrix}\geq 0$, unde $k\in[0,+\infty)$ și $x\in\mathbb{R}$.

Soluție

$\begin{vmatrix}k&x&k-x\\k-x&k&x\\x&k-x&k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2k&x&k-x\\2k&k&x\\2k&k-x&k\end{vmatrix}=2k\cdot\begin{vmatrix}1&x&k-x\\1&k&x\\1&k-x&k\end{vmatrix}=$

$2k\cdot\begin{vmatrix}1&x&k-x\\0&k-x&2x-k\\0&k-2x&x\end{vmatrix}=2k\cdot\left(3x^2-3kx+k^2\right)$ **3p**

$\left(3x^2-3kx+k^2\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta\leq 0,\forall k\in[0,+\infty)$ **2p**

$\Delta=-3k^2\leq 0,\forall k\in\mathbb{R}$ ..... **1 p**

$\left(3x^2-3kx+k^2\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ și $2k\geq 0,k\in[0,+\infty)\Rightarrow 2k\cdot\left(3x^2-3kx+k^2\right)\geq 0$ ..... **1 p**

Problema 3.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

a) Calculați limitele $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calculați limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}\right)^n$.

Soluție

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{2p}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=-1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{2p}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{13}-\sqrt{7}\ldots+\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+n+1}-1}{n}\right)^n=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{1p}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{n^2+n+1}-(n+1)}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}-(n+1)}{n}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-(n+1)}=$$

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+(n+1)\right)}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{2p}$$

Problema 4.

Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+2}{x^2+2x+b}, a,b\in\mathbb{R}$. Determinați $b\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să admită o singură asimptotă verticală, iar în acest caz, determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să nu intersecteze asimptota orizontală. Folosind valorile obținute pentru a și b, determinați domeniul maxim de definiție al funcției, precum și ecuația asimptotei verticale.

Soluție

Funcția are o singură asimptotă verticală dacă numitorul are o singură rădăcină , ceea ce are loc, dacă $\Delta=4-4b=0\Rightarrow b=1$ **2p**

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+2}{x^2+2x+1}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+2}{x^2+2x+1}\right)=1$

Ecuația asimptotei orizontale $y=1$ **1p**

Condiția ca graficul funcției să nu intersecteze asimptota orizontală, este ca ecuația $\left(\dfrac{x^2+ax+2}{x^2+2x+1}\right)=1$ să nu aibă soluții $\Rightarrow(a-2)x+1=0$ nu are soluții $\Rightarrow a=2$ **2p**

Funcția va avea forma $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, domeniul maxim de definiție $D=\mathbb{R}-\{-1\}$ **1p**

Limitele laterale $l_s(-1)=l_d(-1)=+\infty$, deci ecuația asimptotei verticale $x=-1$ **1p**