Al 25-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a XII-a
Soluții și bareme

Problema 1.

Fie mulțimea $G = (3, +\infty)$ și operația $x \circ y = xy - 3x - 2y + 12$.

a) Demonstrați că G este partea stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația "$\circ$"!

b) Arătați că operația "$\circ$" este asociativă, apoi rezolvați în mulțimea G ecuația $x \circ x \circ x = 128$.

c) Rezolvați în mulțimea G ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{2023-ori}} = 5^{2023} + 3$.

Bede Emese, Covasna

Soluție

a) $x, y \in (3, +\infty) \implies x > 3$ și $y > 3$. **1p**

$x \circ y = xy - 3x - 3y + 12 = x(y-3) - 3(y-3) + 3 = (x-3)(y-3) + 3 > 3 \implies x \circ y \in G$
$\forall x, y \in G$. **1p**

b) Demonstrarea asociativității cu calc direct **1p**

$x \circ x \circ x = (x-3)^3 + 3$

$x \circ x \circ x = 128 \iff (x-3)^3 + 3 = 128 \implies (x-3)^3 = 125 \iff x - 3 = 5 \iff x = 8 \in G$

..... **1p**

c) $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{2023-ori}} = (x-3)^n + 3$ **1p**

Demonstrarea prin inducție a egalității. **1p**

$\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{2023-ori}} = (x-3)^n + 3 \iff (x-3)^n + 3 = 5^{2023} + 3 \iff$

$\iff (x-3)^n = 5^{2023} \iff x - 3 = 5 \iff x = 8 \in G$. **1p**

Problema 2.
Fie funcțiile $f, F : \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ și $F(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$.

a) Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f.

b) Determinați o primitivă a lui f, al cărui grafic să conțină punctul $A\left(1, \frac{8}{5}\right)$.

c) Calculați integrala $\int f(x) \cdot F^{2023}(x)\mathrm{d}x$.

Kovács Lívia, Covasna

Soluție

a) F este o primitivă a lui $f \iff F' = f$ **1p**

$F'(x) = (2ax+b)\sqrt{3-2x} - \dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt{3-2x}}$ **1p**

Finalizare: $a = \dfrac{2}{5}$, $b = -\dfrac{1}{5}$, $c = -\dfrac{3}{5}$ **1p**

b) O primitivă a lui f este de forma $F : \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \left(\dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{5}\right)\sqrt{3-2x} + \mathscr{C}$

..... **1p**

$A\left(1, \dfrac{8}{5}\right) \in \mathrm{G}_F \iff F(1) = \dfrac{8}{5}$ **1p**

$C = 2$ și $F(x) = \left(\dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{5}\right)\sqrt{3-2x} + 2$ **1p**

c) $\displaystyle\int f(x) \cdot F^{2023}(x)\mathrm{d}x = \int F'(x) \cdot F^{2023}(x)\mathrm{d}x = \frac{F^{2024}(x)}{2024} + \mathscr{C}$ **1p**

Problema 3.
Fie funcțiile $f, g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + 2\cos x}$ și $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + 2\cos x}$.

a) Calculați integrala $\displaystyle\int \big(2 \cdot f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x$.

b) Calculați integrala $\displaystyle\int \big(f(x) - 2 \cdot g(x)\big)\mathrm{d}x$.

c) Calculați integrala $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$.

Kovács Lívia, Covasna

Soluție

a) $\int \big(2 \cdot f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + \mathscr{C}$ **1p**

b) $\int \big(f(x) - 2 \cdot g(x)\big)\mathrm{d}x = \ln(\sin x + 2\cos x) + \mathscr{C}$ **2p**

c) Folosind rezultatele de la a) și b)

$$\left.\begin{array}{l} \int \big(2 \cdot f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = 2 \cdot \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = x + \mathscr{C} \mid \cdot 2 \\ \int \big(f(x) - 2 \cdot g(x)\big)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - 2 \cdot \int g(x)\mathrm{d}x = \ln(\sin x + 2\cos x) + \mathscr{C} \end{array}\right\} + \ldots\ldots \textbf{2p}$$

$$5 \cdot \int f(x)\mathrm{d}x = 2x + \ln(\sin x + 2\cos x) + \mathscr{C}$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\ln(\sin x + 2\cos x) + \mathscr{C}$$ **2p**

Problema 4.

Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ considerăm operația $x \circ y = x^{3 \cdot \ln y}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstrați că $x \circ y \in G$, oricare ar fi $x, y \in G$.

b) Arătați că legea "$\circ$" este comutativă!

c) Rezolvați în G ecuația $x \circ x = e^3$.

Kovács Lívia, Covasna

Soluție

a) Deoarece $x = e^{\ln x}$, $x \circ y = e^{3 \cdot \ln x \cdot \ln y} > 0$, orcare ar fi $x, y > 0$ **1p**

Propunem că $x \circ y = 1 \iff e^{3 \cdot \ln x \cdot \ln y} = 1$, adică $3 \cdot \ln x \cdot \ln y = 0 \implies x = 1$ sau $y = 1$ contradicție. Rezultă $x \circ y \neq 1, \forall x, y \in G$ **2p**

b) Calcul direct **1p**

c) Ecuația este echivalentă cu $e^{3 \cdot \ln x \cdot \ln y} = e^3$, deci $\big(\ln x\big)^2 = 1 \implies \ln x = \pm 1$ **2p**

$x = e$ sau $x = \frac{1}{e}$ **1p**