Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a X-a - H1 - Tehnic
Soluții și bareme

Problema 1. Calculați valoarea expresiei

$$E = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[12]{b^{19}}} \cdot \left(\frac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{ab^{-1}}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{a^{-\frac{3}{8}}}{b^{-\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{4}{3}}$$

pentru $a = 4$ și $b = 9$.

Soluție.

$a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}$ **2p**

$b^{-\frac{19}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{8}{9}} = b^{-\frac{1}{2}}$ **2p**

$E = (ab)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$ **2p**

Deci $E = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$ **1p**

Problema 2. Fie $a = \log_2 3$ și $b = \log_3 5$.

a) Calculați valoarea expresiei $F = 4^a - 3^b$.

b) Demonstrați că $a > b$.

Soluție

a) Avem $4^{\log_2 3} - 3^{\log_3 5} = 3^2 - 5 = 4$ **2p**

b) $2a = \log_2 9 > \log_2 8 = 3$ **2p**

$3 = \log_3 27 > \log_3 25 = 2b$ **2p**

Deci $2a > 2b$, de unde $a > b$ **1p**

Problema 3. Fie numărul complex $z = \frac{a+2i}{2+ai}$ unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $|z|$ pentru $a = 2024$.

b) Determinați valorile lui a pentru care $z = 1$.

Soluție a) $|z| = \frac{|2024+2i|}{|2+2024i|} = \frac{\sqrt{2024^2+2^2}}{\sqrt{2^2+2024^2}} = 1$ **2p**

b) Prin amplificare cu $2 - ai$ și efectuând calculele avem $z = \frac{4a}{4+a^2} + \frac{4-a^2}{4+a^2}i$ **1p**

Pentru $z = 1$ condiția necesară este $\text{Re}(z) = \frac{4a}{4+a^2} = 1 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$. **2p**

Pentru $a = 2$ avem într-adevăr $z = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$, deci condiția este și suficientă. **2p**

Problema 4. În data de 1. ianuarie 2024 un oraș a avut o populație de $N_0 = 23000$ locuitori. Notăm cu $N(t)$ numărul locuitorilor orașului după t ani. Se estimează o creștere exponențială a populației după formula $N(t) = N_0 \cdot 2^{0,05 \cdot t}$.

a) Care va fi populația aproximativă a orașului după 10 ani?

b) După câți ani se va dubla populația orașului?

Soluție

a) $N(10) = 23000 \cdot 2^{0,05 \cdot 10} = 23000 \cdot 2^{0,5} = 23000 \cdot \sqrt{2} \approx 32527$ **2p**

Rezultatul depinde de precizia abordării $\sqrt{2}$, de aceea acceptăm orice rezultat între 32200 și 32527.

b) Fie t^* numărul anilor trecuți până la dublarea populației inițiale.

Avem $N(t^*) = 2N_0 \Leftrightarrow N_0 \cdot 2^{0,05 \cdot t^*} = 2N_0$ **2p**

De aici avem $2^{0,05 \cdot t^*} = 2$, de unde $0,05 \cdot t^* = 1$ **2p**

Prin urmare $t^* = \frac{1}{0,05} = 20$. **1p**