26. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2024. február 10.

X. osztály - H2 - Természettudomány

1. feladat. Adottak az

$$x = \sqrt{5 - \sqrt{3} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}} \quad \text{és} \quad y = \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} - 1$$

számok.

a) Igazold, hogy x és y irracionálisak!

b) Bizonyítsd be, hogy $\dfrac{x+y}{x-y} - 2\sqrt{6}$ racionális!

2. feladat. Legyenek x_1 és x_2 az $x^2 - x + 1 = 0$ egyenlet gyökei.

a) Számítsd ki $|x_1 + \overline{x_2}|$ értékét!

b) Igazold, hogy $x_1^3 + x_2^3 = -2$.

c) Határozd meg azt a legkisebb $n \in \mathbb{N}^*$ számot, amelyre teljesül az $x_1^n + x_2^n = 1$ egyenlőség!

3. feladat. Egy egyenlő oldalú háromszög oldalain és a belsejében 10 páronként különböző pontot helyezünk el. Igazold, hogy ha a háromszög oldalának a hossza 1m, akkor van két olyan pont a felvettek között, amelyek távolsága kisebb 34cm-nél!

4. feladat. Egy városnak 2024. január 1-jén $N_0 = 23000$ lakója volt. Ha $N(t)$ jelöli a város lakóinak a számát t év elteltével, akkor tudjuk, hogy $N(t)$ exponenciális növekedést követ, és hozzávetőlegesen $N(t) = N_0 \cdot 2^{0,05 \cdot t}$.

a) Mennyi lesz közelítőleg a város lakóinak a száma 10 év múlva?

b) Hány év múlva fog a város lakóinak a száma megduplázódni?

Munkaidő 3 óra.
Minden feladatot 0-től 7-ig pontozunk.