Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 10 februarie 2024

Clasa a X-a - H2 - Științele naturii

Problema 1. Fie $x = \sqrt{5 - \sqrt{3} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}$ și $y = \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} - 1$.

a) Demonstrați că x și y sunt numere iraționale!

b) Demonstrați că $\frac{x+y}{x-y} - 2\sqrt{6}$ este număr rațional!

Problema 2. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - x + 1 = 0$.

a) Calculați valoarea expresiei $|x_1 + \overline{x_2}|$.

b) Demonstrați că $x_1^3 + x_2^3 = -2$.

c) Să se determine cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_1^n + x_2^n = 1$.

Problema 3. Pe laturile și în interiorul unui triunghi echilateral se iau 10 puncte distincte, două câte două. Să se arate că dacă lungimea laturilor triunghiului este egală cu 1m, există două puncte din cele luate care au distanța între ele mai mică decât 34 cm.

Problema 4. În data de 1. ianuarie 2024 un oraș a avut o populație de $N_0 = 23000$ locuitori. Notăm cu $N(t)$ numărul locuitorilor orașului după t ani. Se estimează o creștere exponențială a populației după formula $N(t) = N_0 \cdot 2^{0,05 \cdot t}$.

a) Care va fi populația aproximativă a orașului după 10 ani?

b) După câți ani se va dubla populația orașului?

Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.