MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

XII. osztály

1. feladat. Az $M = (-1, 2)$ halmazon értelmezzük a „$*$” műveletet úgy, hogy $x*y = \dfrac{xy + 4(x + y) - 2}{2xy - (x + y) + 5}$, bármely $x, y \in (-1, 2)$ esetén. Tudjuk, hogy $(M, *)$ Abel-féle csoport.

a) Igazold, hogy az $f\colon (0, \infty) \to (-1, 2)$, $f(x) = \dfrac{2 - x}{1 + x}$ függvény egy izomorfizmus az $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ és $(M, *)$ csoportok közt!

b) Igazold, hogy

$$\left(\frac{2 \cdot 2023! - 1}{2023! + 1}\right) * \left(-\frac{1}{4}\right) * \left(-\frac{2}{5}\right) * \ldots * \left(-\frac{2021}{2024}\right) = 1.$$

2. feladat. Határozd meg az összes $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ primitiválható függvényt, amelyeknek az $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitív függvényére teljesül, hogy $F(0) = 0$ és $F(x) + \ln f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

3. feladat. Tekintsük azoknak az egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú háromszögeknek a H_n halmazát, amelyek oldalhosszai $(2n + 1)$-nél kisebb vagy egyenlő egész számok.

a) Hány eleme van a H_n halmaznak?

b) Az $n = 7$ esetben mennyi a valószínűsége annak, hogy tetszőlegesen választva egy háromszöget a H_7 halmazból, az tompaszögű háromszög legyen?

4. feladat. Számítsd ki az

$$\mathcal{I} = \int \frac{b^x - a^x + (xb^x + 1)\ln a - (xa^x + 1)\ln b}{x^2(ab)^x + x(a^x + b^x) + 1}\,\mathrm{d}x$$

integrált, ahol a és b pozitív valós számok és $x \in (0, \infty)$!

covasna - 2257

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.