74. Országos matematikaolimpia
Körzeti szakasz, 2024. február 10.
IX. osztály

1. feladat

a) Oldd meg az egész számok halmazán a $|x-3|+|x-1|+|x+1|=5$ egyenletet!

b) Határozd meg azokat a $k \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyek esetén a

$$|x-3|+|x-1|+|x+1|=k$$

egyenletnek pontosan egy egész megoldása van.

2. feladat. Mutasd ki, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén a $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ szám osztható 17-tel.

3. feladat. Igazold, hogy bármely $a, b, c > 0$ valós számok esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

a) $\dfrac{a}{a^2+bc} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{bc}}$

b) $\dfrac{a}{a^2+bc} \leq \dfrac{1}{4b} + \dfrac{1}{4c}$

c) $\dfrac{a}{a^2+bc} + \dfrac{b}{b^2+ca} + \dfrac{c}{c^2+ab} \leq \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{2c}$

4. feladat. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög AB, BC, DE és EF oldalain legyenek az M, N, P illetve Q pontok úgy, hogy $\dfrac{BM}{MA} = m, \dfrac{BN}{NC} = n, \dfrac{EP}{PD} = p, \dfrac{EQ}{QF} = q$.

a) Igazold, hogy $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{BP} = \left(\dfrac{1}{1+p} - \dfrac{1}{1+m}\right)\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{EN} + \overrightarrow{BQ} = \left(\dfrac{1}{1+q} - \dfrac{1}{1+n}\right)\overrightarrow{BC}$.

b) Tudva, hogy $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{0}$, igazold, hogy MP, NQ és CF összefutó egyenesek.

Munkaidő 3 óra.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.