MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa zonală, 11 februarie 2023
Clasa a IX-a
(3 ore/săptămână)

Problema 1.
Mingea de tenis trimisă de racheta unui sportiv pe un teren de sport lovește terenul în punctele $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ prin sărituri. Punctele $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ sunt coliniare în această ordine. Lungimea unei sărituri este considerată ca fiind distanța dintre două puncte consecutive în care mingea lovește terenul. Lungimea primei sărituri este de $80\,m$ și reprezintă distanța dintre punctele A_0 și A_1. Începând cu a doua săritură lungimea fiecărei sărituri este jumătate din lungimea precedentei sărituri.

a) Determinați distanța dintre punctele A_0 și A_5.

b) Mingea poate lovi terenul la o distantă de exact $158,75\,m$ de la punctul A_0? Justificați răspunsul.

Problema 2.
Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir în progresie aritmetică cu $a_7 = 20, a_{10} = 29$ și fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.

a) Determinați primul termen și rația progresiei aritmetice.

b) Calculați valoarea lui T, unde:

$$T = f(a_1) + f(a_4) + f(a_7) + \ldots + f(a_{40}).$$

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2 + 8 + 14 + \ldots + x = 1180.$$

Problema 3.
Se consideră paralelogramul $ABCD$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Fie punctele P și Q astfel încât $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

a) Desenați figura corespunzătoare datelor problemei.

b) Dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$, exprimați vectorii $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AP}$ și $\overrightarrow{OP}$ în funcție de $\overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{b}$.

c) Demonstrați că punctele A, Q și P sunt coliniare.

Problema 4.
Dacă $[u]$ reprezintă partea întreagă a numărului real u, arătați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$\left[\frac{2-x}{2}\right] + \left[\frac{1-x}{2}\right] + \left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{x-2}{2}\right] \leq -1.$$

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!
Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.