MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

"ADOLF HAIMOVICI" ALKALMAZOTT MATEMATIKA VERSENY

Körzeti szakasz, 2023. február 11.

X. osztály

(4 órás program)

1. feladat. Az $a, b, c \in (1, \infty)$ esetén vezessük be a következő jelöléseket:

$$x = \log_{bc} a, y = \log_{ca} b, z = \log_{ab} c$$

a) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$.

b) Bizonyítsd be, hogy $a^{(x+1)(y-z)} \cdot b^{(y+1)(z-x)} \cdot c^{(z+1)(x-y)} = 1$.

Gazeta Matematică

2. feladat. Az ABC háromszög csúcsainak affixumai z_A, z_B és z_C. Ha $|z_A| = |z_B| = |z_C| = z_A + z_B + z_C$, igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű!

3. feladat Határozd meg az $n \in \mathbb{N}$ prímszámot úgy, hogy az

$$x = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2+1}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2+1}}$$

racionális szám legyen!

4. feladat.

a) Igazold, hogy bármely r racionális szám felírható két olyan irracionális szám összegeként, melyeknek a szorzata irracionális!

b) Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül, hogy $f(xy) = f(x + y)$ minden x és y irracionális szám esetén!

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
Munkaidő 3 óra.
Minden feladatot 0-től 7-ig pontozunk.