MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a X-a

(4 ore/ săptămână)

Problema 1. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ și $x = \log_{bc} a$, $y = \log_{ca} b$, $z = \log_{ab} c$.

a) Arătați că $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 2$.

b) Demonstrați că $a^{(x+1)(y-z)} \cdot b^{(y+1)(z-x)} \cdot c^{(z+1)(x-y)} = 1$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie triunghiul ABC cu afixele vârfurilor z_A, z_B respectiv z_C astfel încât $|z_A| = |z_B| = |z_C| = z_A + z_B + z_C$. Arătați că triunghiul ABC este dreptughic!

Problema 3. Determinați numărul prim $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul

$$x = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2+1}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2+1}}$$

să fie rațional!

Problema 4.

a) Demonstrați că orice număr rațional r se poate scrie ca suma a două numere iraționale ale căror produs este irațional!

b) Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația $f(xy) = f(x+y)$ pentru orice x și y irațional!

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!
Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.