25. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2023. február 11.

XI. OSZTÁLY

1. feladat.

Adott az $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix. Határozd meg az $n \in \mathbb{N}^*$ értékét tudva azt, hogy $A^n + A^{n+2} = 90A$.

2. feladat.

Igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$\begin{vmatrix} k & x & k-x \\ k-x & k & x \\ x & k-x & k \end{vmatrix} \geq 0$$, ahol $k \in [0,+\infty)$ és $x \in \mathbb{R}$!

3. feladat.

Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ függvény.

a) Számítsd ki $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$-et és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$-et!

b) Számítsd ki $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}\right)^n$-t!

4. feladat.

Adott az $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+2}{x^2+2x+b}, a,b\in\mathbb{R}$ függvény. Határozd meg a $b\in\mathbb{R}$ értékét, amelyre a függvény grafikus képének egyetlen függőleges aszimptotája van és ebben az esetben, számítsd ki az $a\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy a függvény grafikus képe és a vízszintes aszimptotája ne metssze egymást! A kapott a és b értékek esetén határozd meg a függvény maximális értelmezési tartományát és a függőleges aszimptota egyenletét!

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
Minkaidő 3 óra.
Minden feladat helyes megoldása 7 pontot ér.