Al 25-lea Concurs National de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici”
Etapa zonală, 11 februarie 2023

CLASA A XI-A

Problema 1.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n+A^{n+2}=90A$.

Problema 2.

Demonstrați următoarea inegalitate:

$$\begin{vmatrix}k & x & k-x\\ k-x & k & x\\ x & k-x & k\end{vmatrix}\geq 0$$, unde $k\in[0,+\infty)$ și $x\in\mathbb{R}$.

Problema 3.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

a) Calculați limitele $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

b) Calculați limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}\right)^n$.

Problema 4.

Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+2}{x^2+2x+b}, a,b\in\mathbb{R}$. Determinați $b\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să admită o singură asimptotă verticală, iar în acest caz, determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să nu intersecteze asimptota orizontală. Folosind valorile obținute pentru a și b, determinați domeniul maxim de definiție al funcției, precum și ecuația asimptotei verticale.

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!
Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte