25. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2023. február 11.

XII. osztály

1. feladat.
Adott a $G = (3, +\infty)$ halmaz és az $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$ művelet.

a) Bizonyítsd be, hogy a G zárt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek a "$\circ$" műveletre vonatkozóan!

b) Bizonyítsd be, hogy a "$\circ$" művelet asszociatív, majd oldd meg az $x \circ x \circ x = 128$ egyenletet a G halmazon!

c) Oldd meg a G halmazon az $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{2023-szer}} = 5^{2023} + 3$ egyenletet!

2. feladat.
Adottak az $f, F : \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ és $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$ függvények.

a) Határozd meg az a, b és c valós számokat, úgy, hogy az F függvény egy primitív függvénye legyen f-nek!

b) Határozd meg f-nek azt a primitív függvényét, melynek grafikus képe tartalmazza az $A\left(1, \frac{8}{5}\right)$ pontot!

c) Számítsd ki az $\int f(x) \cdot F^{2023}(x)\mathrm{d}x$ integrált!

3. feladat.
Adottak az $f, g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + 2\cos x}$ és $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + 2\cos x}$ függvények.

a) Számítsd ki az $\int \big(2 \cdot f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x$ integrált!

b) Számítsd ki az $\int \big(f(x) - 2 \cdot g(x)\big)\mathrm{d}x$ integrált!

c) Számítsd ki az $\int f(x)\mathrm{d}x$ integrált!

4. feladat.
A $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ halmazon adott az $x \circ y = x^{3 \cdot \ln y}$ művelet, ahol $x, y \in G$.

a) Bizonyítsd be, hogy $x \circ y \in G$, bármilyen $x, y \in G$ esetén!

b) Mutasd ki, hogy a "$\circ$" művelet kommutatív!

c) Oldd meg a G halmazon az $x \circ x = e^3$ egyenletet!

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
Munkaidő 3 óra.
Minden feladatot 0-től 7-ig pontozunk.