MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

Al 25-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie mulțimea $G = (3, +\infty)$ și operația $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.

a) Demonstrați că G este partea stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația "$\circ$"!

b) Arătați că operația "$\circ$" este asociativă, apoi rezolvați în mulțimea G ecuația $x \circ x \circ x = 128$.

c) Rezolvați în mulțimea G ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{2023-ori}} = 5^{2023} + 3$.

Problema 2.

Fie funcțiile $f, F : \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ și $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$.

a) Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f.

b) Determinați o primitivă a lui f, al cărui grafic să conțină punctul $A\left(1, \frac{8}{5}\right)$.

c) Calculați integrala $\int f(x) \cdot F^{2023}(x)\mathrm{d}x$.

Problema 3.

Fie funcțiile $f, g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + 2\cos x}$ și $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + 2\cos x}$.

a) Calculați integrala $\int \big(2 \cdot f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x$.

b) Calculați integrala $\int \big(f(x) - 2 \cdot g(x)\big)\mathrm{d}x$.

c) Calculați integrala $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Problema 4.

Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se consideră operația $x \circ y = x^{3 \cdot \ln y}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstrați că $x \circ y \in G$, pentru orice $x, y \in G$.

b) Arătați că legea "$\circ$" este comutativă!

c) Rezolvați în G ecuația $x \circ x = e^3$.

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!
Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.