Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a X-a - H1 - Tehnic

Problema 1.

a) Calculați valoarea lui $\dfrac{\log_2 48}{\log_6 2} - \dfrac{\log_2 3}{\log_{96} 2}$.

b) Demonstrați că $\log_{3+2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2}) + \log_{3-2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2}) = -2$.

c) Se consideră $a = \lg 45$ și $b = \lg 75$. Exprimați $\lg 15$ în funcție de a și b.

Problema 2. Se consideră numărul complex $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, și $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrați că $z^2 + z + 1 = 0$.

b) Determinați valorile lui S_5 și S_6.

Problema 3. Arătați că, pentru orice numere reale $x, y > 0$, $x \neq y$ valoarea expresiei

$$E(x,y) = \frac{x - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{xy} + \sqrt{y}}$$

este constantă.

Problema 4. În trei magazine se vinde un produs de același fel. În primul magazin se vând m bucăți cu p lei/bucată. În al doilea magazin se vând cu n bucăți mai mult decât în primul magazin la prețul de 40 lei/bucată, iar în al treilea magazin se vând cu n bucăți mai puțin decât în primul magazin la prețul de 60 lei/bucată. Știind că în cele trei magazine se obțin sume egale de bani din vânzare, aflați prețul de vânzare a unei bucăți de produs de la primul magazin.

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.