27. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2025. február 15.

XI. osztály - H1 - Szakközép

1. feladat. Határozd meg az $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ mátrixot úgy, hogy $X^2 - 4X + 13I_2 = O_2$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. feladat. Adott a következő determináns $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{R}$.

a) Számítsd ki $D(4)$ értékét!

b) Igazold, hogy $D(a) = (a-1)(a-2)$!

c) Oldd meg a valós számok halmazán a $D(2^x) = 0$ egyenletet!

3. feladat. Adott az $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{4x^2+ax+1}{bx+1}}$ függvény, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Határozd meg az f maximális értelmezési tartományát, ha $a = 5$ és $b = 2$.

b) Az a és b milyen értékeire lesz, az $y = 2x + 3$ egyenletű egyenes aszimptotája a $+\infty$ felé a $g : D \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = f^2(x)$ függvénynek?

4. feladat. Egy cég néhány alkalmazottjának túlórázni kellett (program után vagy hétvégén). Ilyenkor az órabérük 20 lej/óra, míg a megszokott program szerint 10 lej/óra. A cég könyvelési osztálya októberre a következő kimutatást kapta:

	Megszokott program szerint ledolgozott órák száma	Túlórák száma
Antonescu	160	40
Cristescu	160	56
Enescu	160	60
Ionescu	160	32
Popescu	160	24
Teodorescu	144	48

a) Mátrixszorzatot használva írd le és számítsd ki a hat alkalmazott bérezését!

b) A könyvelőség, ugyanazon szabály szerint számolta novemberben is a béreket, a következő mátrixszorzat alapján: $\begin{pmatrix} 160 & 36 \\ 0 & 0 \\ 80 & 16 \\ 96 & 32 \\ 128 & 56 \\ 144 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$.

Számítsd ki, hogy a Cristescu nevű alkalmazott hány lejt kapott összesen a két hónapban?

c) Számítsd ki, hogy a Teodorescu nevű alkalmazottnak hány túlórája volt novemberben, tudva, hogy a két hónapi bére összesen 4 000 lej volt!

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-től 7-ig pontozunk.