Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XI-a - H1 - Tehnic

Problema 1. Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încât $X^2 - 4X + 13I_2 = O_2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2. Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $D(4)$!

b) Demonstrați că $D(a) = (a-1)(a-2)$!

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(2^x) = 0$!

Problema 3. Fie funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{4x^2+ax+1}{bx+1}}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați domeniul maxim de definiție D al funcției f, fiind date $a = 5$ și $b = 2$!

b) Aflați numerele reale a și b, dacă dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru funcția $g : D \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = f^2(x)$!

Problema 4. Câțiva dintre angajații unei firme au fost solicitați să presteze ore suplimentare (peste program sau în weekend), în acest caz ei fiind plătiți cu 20 lei/oră, față de 10 lei/oră pentru munca prestată în timpul programului normal. Pentru luna octombrie, serviciul de contabilitate a primit situația din tabelul de mai jos:

	Număr de ore lucrate în program normal	Număr de ore suplimentare
Antonescu	160	40
Cristescu	160	56
Enescu	160	60
Ionescu	160	32
Popescu	160	24
Teodorescu	144	48

a) Scrieți și calculați plata drepturilor salariale ale celor șase angajați ca un produs de matrice.

b) Dacă aceeași regulă s-a păstrat și pentru luna noiembrie, contabilitatea calculând salariile după produsul matriceal $\begin{pmatrix} 160 & 36 \\ 0 & 0 \\ 80 & 16 \\ 96 & 32 \\ 128 & 56 \\ 144 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$.

Calculați ce sumă de bani a primit în total, în cele două luni, angajatul Cristescu!

c) Calculați câte ore suplimentare a lucrat Teodorescu în luna noiembrie, știind că pentru munca prestată în cele două luni a primit suma de 4 000 de lei!

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.