27. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2025. február 15.

XII. osztály - H1 - Szakközép

1. feladat. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = 3xy - 3x - 3y + 4$ asszociatív műveletet.

a) Igazold, hogy az $(1, +\infty)$ intervallum stabil (zárt) részhalmaza $\mathbb{R}$-nek a "$\circ$" műveletre nézve!

b) Határozd meg a 3 szimmetrikusát az $(1, +\infty)$ intervallumon a "$\circ$" műveletre nézve!

c) Oldd meg a valós számok halmazán az $x * x * x = 1126$ egyenletet!

2. feladat. Adottak a következő függvények:
$f, F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$, $F(x) = (ax + b)\ln x - cx$

a) Határozd meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy az F függvény primtív függvénye legyen az f függvénynek!

b) Határozd meg az f függvénynek azt az F primitív függvényét, amelyre $F(1) = 0$

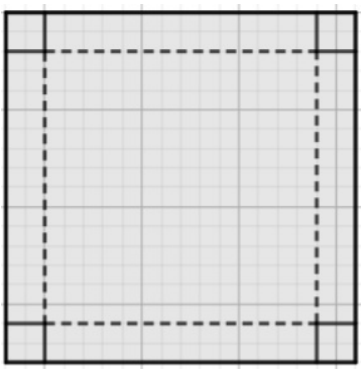
3. feladat.

a) Határozd meg a $\widehat{6}$ rendjét a $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ csoportban!

b) Határozd meg az $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$ csoport elemeinek rendjét!

c) Határozd meg a $\widehat{13}$ inverzét a $(\mathbb{Z}_{71}^*, \cdot)$ csoportban!

4. feladat. Egy 1m oldalú négyzet alakú bádoglap minden sarkából levágunk egy x oldalú kis négyzetet. A megmaradt bádoglapból egy téglatest alakú (fedő nélküli) dobozt készítünk a szaggatott vonalak mentén hajtogatva. Igazold, hogy a kapott doboz térfogata nem haladja meg a $74,(074)$ litert, és határozd meg x-et úgy, hogy a doboz térfogata maximális legyen.



Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
Munkaidő 3 óra.
Minden feladatot 0-től 7-ig pontozunk.