Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"

Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XII-a - H1 - Tehnic

Problema 1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - 3x - 3y + 4$.

a) Arătați că intervalul $(1, +\infty)$este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

b) Determinați simetricul numărului 3 în intervalul $(1, +\infty)$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

c) Rezolvați ecuația $x * x * x = 1126$ în mulțimea numerelor reale.

Problema 2. Se consideră funcțiile $f, F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}, F(x) = (ax + b)\ln x - cx$.

a) Determinați numerele reale a, b, c astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f.

b) Determinați primitiva F a funcției f cu proprietatea $F(1) = 0$.

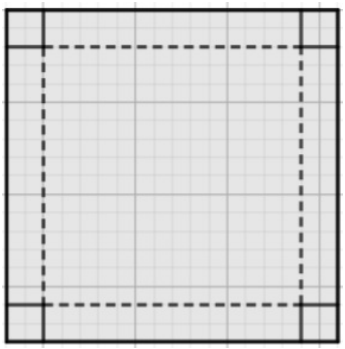
Problema 3.

a) Determinați ordinul elementului $\widehat{6}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

b) Determinați ordinele elementelor grupului $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$.

c) Determinați inversul elementului $\widehat{13}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{71}^*, \cdot)$.

Problema 4. Dintr-o foaie de tablă având forma unui pătrat cu latura 1 m, se elimină din fiecare colț câte un pătrățel de latură x. Din bucata de tablă rămasă se confecționează o cutie paralelepipedică (fără capac), prin îndoire după liniile punctate. Demonstrați că volumul cutiei obținute nu poate depăși 74,(074), litri și determinați x, astfel încât volumul cutiei să fie maxim.



Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.