Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată ,,Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a IX-a - H2 - Științele naturii

Problema 1.

Un om care stă pe malul unui râu vede un copac pe malul îndepărtat la un unghi de 60°. Dacă se îndepărtează cu 20 m de mal, vede același copac la un unghi de 30°. Calculați înălțimea copacului și lățimea râului!

Problema 2.

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația:

$$\min(1-2x, 2-x) \geq \max(x+1, 2x-1),$$

unde simbolul $\min(a,b)$ denotă cel mai mic dintre a și b, iar $\max(a,b)$ cel mai mare dintre a și b.

Problema 3.

Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai șirului $(a_n)_{n\geq 1}$

a) Dacă $S_n = n^2 + 3n$, arătați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

b) Calculați suma:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{510}}+\sqrt{a_{511}}}.$$

Problema 4.

În planul triunghiului ABC se consideră punctele D, E, F, M, N, astfel încât:

$$\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{CE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FC},\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{NE}.$$

a) Exprimați vectorul $\overrightarrow{MN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

b) Aflați numărul real x, dacă între ariile triunghiurilor există relația $A_{DEF_\Delta} = x \cdot A_{ABC_\Delta}$.

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!
Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.