27. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2025. február 15.

X. osztály - H2 - Természettudomány

1. feladat. Adott a $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ komplex szám, és $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n,\ n \in \mathbb{N}$.

a) Igazold, hogy $z^2 + z + 1 = 0$.

b) Határozd meg az S_5 és S_6 értékét!

2. feladat. Legyen $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Mutasd ki, hogy:

$$\frac{1}{\log_a 3 \cdot \log_a 9} + \frac{1}{\log_a 9 \cdot \log_a 27} + \cdots + \frac{1}{\log_a 3^{2024} \cdot \log_a 3^{2025}} = \frac{2024}{2025} \cdot \frac{1}{\log_a^2 3}$$

3. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{\sqrt{3-2a} + \sqrt{2a}}{\sqrt{1+2a} + \sqrt{2(1-a)}} = \frac{\sqrt{-2a^2+3a}}{\sqrt{-2a^2+a+1}}.$$

4. feladat.

Dani és Robi egyforma négyzet alakú lapokból négyzet alakú mozaikot épít. Robi egy fekete lapot tesz a közepére. Dani 8 fehér lapot tesz köré, így egy második négyzetet alkotva. Robi 16 fekete lapot tesz köréjük, így egy harmadik négyzetet alkotva.

a) Hány lapra van szüksége Robinak a tizenegyedik négyzet elkészítéséhez?

b) Hány lapot tett le Dani, ha összesen 20 négyzet van?

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-től 7-ig pontozunk.