Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a X-a - H2 - Științele naturii

Problema 1. Se consideră numărul complex $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, și $S_n = 1+z+z^2+\cdots+z^n,\ n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrați că $z^2+z+1=0$.

b) Determinați valorile lui S_5 și S_6.

Problema 2. Fie $a \in (0,1)\cup(1,+\infty)$. Arătați că

$$\frac{1}{\log_a 3 \cdot \log_a 9} + \frac{1}{\log_a 9 \cdot \log_a 27} + \cdots + \frac{1}{\log_a 3^{2024} \cdot \log_a 3^{2025}} = \frac{2024}{2025} \cdot \frac{1}{\log_a^2 3}.$$

Problema 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarea ecuație:

$$\frac{\sqrt{3-2a}+\sqrt{2a}}{\sqrt{1+2a}+\sqrt{2(1-a)}} = \frac{\sqrt{-2a^2+3a}}{\sqrt{-2a^2+a+1}}$$

Problema 4.

Doru și Remus construiesc un mozaic pătrat din plăci de gresie pătrate identice. Remus pune o placă neagră în centru. Doru pune 8 plăci albe în jurul ei, formând un al doilea pătrat. Remus pune 16 plăci negre în jurul acestora, formând al treilea pătrat.

a) De câte plăci are nevoie Remus pentru a completa cel de-al unsprezecelea pătrat?

b) Câte plăci a pus Doru dacă în total au fost 20 de pătrate?

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.