27. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2025. február 15.

XI. osztály - H2 - Természettudomány

1. feladat. Határozd meg az $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ mátrixot úgy, hogy teljesüljön az $X^2 - 4X + 13I_2 = O_2$ egyenlet, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, és $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. feladat.

a) Számítsd ki a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x\mathrm{tg}x} - 1}{e^{x \sin x} - 1}$ határértéket!

b) Határozd meg az a és b valós számot úgy, hogy: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{ax^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + bx} \right) = \sqrt{2} - 1$

3. feladat. Egy medence teljesen megtelik az A csapon keresztül 6 óra alatt. Ugyanez a medence a B csapon keresztül 8 óra alatt telik meg. A teljesen feltöltött medence a C leeresztő nyíláson keresztül 10 óra alatt kiürül. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha:

a) az A és B csapot egyszerre nyitjuk meg;

b) a B csapot megnyitjuk egyidejűleg a C leeresztő nyílással;

c) az A csapot és a C leeresztő nyílást egyszerre nyitjuk meg;

d) az A és B csapot egyidejűleg nyitjuk meg a C leeresztő nyílással;

e) a medence 30%-a megtelik az A és B csap együttes megnyitásával, majd a B csapot elzárjuk;

f) az A csapot megnyitjuk, majd 2 óra múlva a B csapot is megnyitjuk, és további egy óra elteltével a C leeresztő nyílást is megnyitjuk;

g) a medence egyharmada megtelik, amikor egyszerre megnyitjuk az A és B csapot?

4. feladat Legyen egy tetszőleges ABC háromszög, ahol az oldalak hosszát a következőképpen jelöljük: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, és h_a, h_b, illetve h_c rendre az oldalakhoz tartozó magasságokat jelentik.
Bizonyítsd be, hogy: $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_a \cdot h_c \\ 1 & c & h_a \cdot h_b \end{vmatrix} = 0.$

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
Munkaidő 3 óra.
Minden feladatot 0-től 7-ig pontozunk.