Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XI-a - H2 - Științele naturii

Problema 1. Să se determine matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încât $X^2 - 4X + 13I_2 = O_2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\mathrm{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2.

a) Să se calculeze următoarea limită:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x \operatorname{tg} x} - 1}{e^{x \sin x} - 1}$$

b) Să se determine valorile numerelor reale a și b astfel încât să avem:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{ax^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + bx} \right) = \sqrt{2} - 1$$

Problema 3. Un bazin este umplut complet printr-un robinet A în 6 ore. Același bazin este umplut printr-un alt robinet B în 8 ore. Acest bazin plin cu apă este golit prin scurgerea C în 10 ore. În cât timp se umple bazinul dacă:

a) robinetele A și B sunt deschise simultan;

b) este deschis robinetul B în același timp cu scurgerea C;

c) sunt deschise robinetul A și scurgerea C, în același timp;

d) sunt deschise robinetele A și B în același timp cu scurgerea C;

e) se umple 30% din bazin fiind deschise în același timp robinetele A și B, apoi robinetul B se închide;

f) se deschide robinetul A, după 2 ore se deschide și B, iar după încă o oră se deschide și scurgerea C;

g) o treime a bazinului este umplută când se deschid, în același timp, robinetele A și B ?

Problema 4. Fie un triunghi oarecare ABC, unde notăm lungimile laturilor cu $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ și h_a, h_b, respectiv h_c sunt înălțimile corespunzătoare fiecărei laturi în triunghi.

Demonstrați că: $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_a \cdot h_c \\ 1 & c & h_a \cdot h_b \end{vmatrix} = 0.$

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!
Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.