27. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2025. február 15.

XII. osztály - H2 - Természettudomány

1. feladat. Adott a $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$ mátrixhalmaz. Igazold, hogy a G Ábel-féle csoport a mátrixok szorzási műveletével!

2. feladat. Tekintsük az $M = (-\infty, 1)$ halmazt. Bármely $(x, y) \in M \times M$ esetén értelmezzük az $x * y = \dfrac{2024 - xy}{2025 - x - y}$.

a) Bizonyítsd be, hogy $(x, y) \mapsto x * y$ egy belső művelet az M halmazon!

b) Bizonyítsd be, hogy a „$*$” művelet kommutatív és asszociatív, de nem létezik semleges eleme!

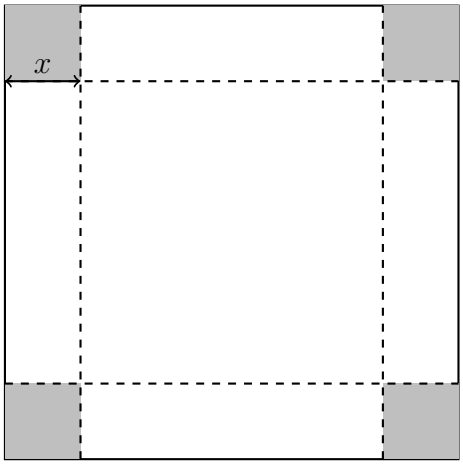
3. feladat. Számítsd ki:

a) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx, \quad x > 0$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

4. feladat.

Egy 1m oldalú négyzet alakú bádoglap minden sarkából levágunk egy x oldalú kis négyzetet. A megmaradt bádoglapból egy téglatest alakú (fedő nélküli) dobozt készítünk a szaggatott vonalak mentén hajtogatva. Igazold, hogy a kapott doboz térfogata nem haladja meg a 74,(074) litert, és határozd meg x-et úgy, hogy a doboz térfogata maximális legyen!



Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
Munkaidő 3 óra.
Minden feladatot 0-től 7-ig pontozunk.