Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XII-a - H2 - Științele naturii

Problema 1.

Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup abelian, unde $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$.

Problema 2.

Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$, notăm

$$x * y = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y}.$$

a) Arătați că funcția $(x, y) \mapsto x * y$ definește o lege de compoziție pe M.

b) Demonstrați că legea de compoziție „$*$" este comutativă și asociativă, dar nu admite element neutru.

Problema 3.

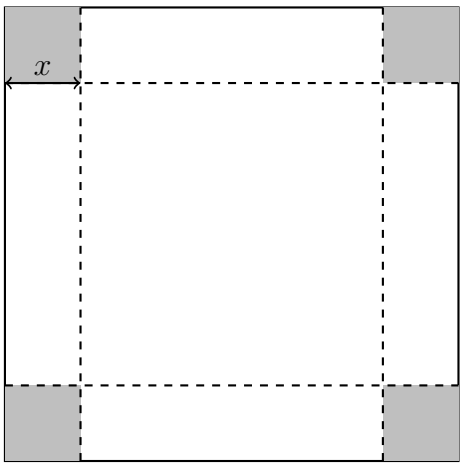
Să se calculeze:

a) $\int x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \, dx, \quad x > 0$

b) $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Problema 4.

Dintr-o foaie de tablă având forma unui pătrat cu latura 1 m, se elimină din fiecare colț câte un pătrățel de latură x. Din bucata de tablă rămasă se confecționează o cutie paralelepipedică (fără capac), prin îndoire după liniile punctate. Demonstrați că volumul cutiei obținute nu poate depăși 74,(074) litri și determinați x, astfel încât volumul cutiei să fie maxim.



Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!
Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.