MINISTERUL EDUCAȚIEI
Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2022. március 26.

VI. osztály

1. feladat. Tekintsük az $n-1$, $2n-1$ és n^2+3 természetes számokat, ahol $n \geqslant 3$ természetes szám.

a) Igazold, hogy egyetlenegy n természetes szám esetén lesz mindhárom szám prímszám!

b) Igazold, hogy végtelen sok n természetes szám esetén lesz mindhárom szám összetett!

Gazeta Matematică

2. feladat. Határozd meg azokat az (A, B) halmazpárokat, amelyekben a halmazok elemei nemnulla természetes számok és egyidejűleg teljesítik a következő feltételeket:

- az A és B halmaznak is három eleme van;
- az $A \cap B$ halmaznak pontosan egy eleme van;
- $6 \in A$ és $12 \in B$;
- ha $x, y \in A$ és $x \neq y$, akkor $x \cdot y \in B$.

3. feladat. Határozd meg azokat a nemnulla a, b, c, d természetes számokat, amelyekre $a \leqslant b \leqslant c$ és

$$2^a + 2^b + 2^c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot d.$$

4. feladat. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle$ hegyesszög. A háromszög külső tartományában felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $AD = AC$, $AE = AB$, D és B az AC egyenes ugyanazon oldalán helyezkednek el, E és C az AB egyenes ugyanazon oldalán helyezkednek el és $DAC\sphericalangle = BAE\sphericalangle = 120^\circ + \frac{2}{3} BAC\sphericalangle$. Legyen P a BE és CD egyenesek metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy:

a) az AE és CD egyenesek merőlegesek egymásra;

b) a PA és DE egyenesek merőlegesek egymásra.

Munkaidő 2 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.