MINISTERUL EDUCAȚIEI
Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2022. március 26.

VII. osztály

1. feladat. Legyen I az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontja. A D, E és F pontok az IA, IB, illetve IC szakaszok felezőpontjai, G, H és J az I pontból az AB, BC, illetve CA oldalakra állított merőlegesek talppontjai.

Bizonyítsd be, hogy a D, E, F, G, H és J pontok akkor és csak akkor vannak egy körön, ha az ABC háromszög egyenlő oldalú!

2. feladat. n egymásutáni egész szám összege 2022. Határozd meg az n nemnulla természetes szám lehetséges értékeit!

Gazeta Matematică

3. feladat. Legyenek a, b és c szigorúan pozitív valós számok.

a) Bizonyítsd be, hogy ha $a^2+ab+ac$, $b^2+ba+bc$ és $c^2+ca+cb$ racionális számok, akkor $a^2+b^2+c^2$ is racionális szám!

b) Bizonyítsd be, hogy léteznek olyan a, b és c számok, amelyekre $a^2+ab+bc$, $b^2+bc+ca$ és $c^2+ca+ab$ racionális számok, de $a^2+b^2+c^2$ irracionális!

4. feladat. Az A-ban derékszögű ABC háromszögben D az A-ból húzott magasság talppontja, M a BC átfogó felezőpontja.

Azt mondjuk, hogy az ABC háromszög belsejében lévő X pont *jelentős*, ha $AB = BX$ és a CXD szög szögfelezője átmegy az M ponton.

a) Bizonyítsd be, hogy ha létezik legalább egy jelentős pont, akkor az ABC szög 60°-os!

b) Bizonyítsd be, hogy ha az ABC szög 60°-os, akkor a B középpontú, AB sugarú kör kisebbik AM körívének minden pontja jelentős!

Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.