MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice
din România

Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2022. március 26.

VIII. osztály

1. feladat. Adottak az $a, b, c \in (0, \infty)$ számok. Igazold, hogy:

a) $\sqrt{\frac{2a}{b+c}} \geqslant \frac{4a}{2a+b+c}$.

b) $\frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{2a}{b+c}} + \frac{c}{b} \cdot \sqrt{\frac{2b}{c+a}} + \frac{a}{c} \cdot \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geqslant 3$.

2. feladat. Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre az $\frac{n}{[\sqrt{n+2}]}$ és az $\frac{n+2}{[\sqrt{n}]}$ számok természetesek. ($[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli.)

3. feladat. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest BC és DD' élein felvesszük az M, illetve N pontokat úgy, hogy $\frac{CM}{MB} = \frac{DN}{ND'.} = k$. Legyen P a DM és AC egyenesek metszéspontja, Q a CN és DC' egyenesek metszéspontja.

a) Igazold, hogy a PQ egyenes párhuzamos az (ABC') síkkal!

b) Határozd meg a k értékét, ha $ABCDA'B'C'D'$ kocka és $\big(PQ, (ABC)\big) \sphericalangle = 30°$.

Gazeta Matematică

4. feladat. A $\mathcal{C}$ kocka élhossza $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$, a kockát n^3 kis kockára osztjuk, amelyek élei egységnyi hosszúságúak és belső tartományaik páronként diszjunktak.

Azt mondjuk, hogy két ilyen egységnyi oldalú kis kocka *olimpiai*, ha a $\mathcal{C}$ kocka bármely lapjával párhuzamos tetszőleges sík legfeljebb az egyik kis kocka belsejét metszi. Kiválasztjuk a $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ kis kockákat, amelyek páronként olimpiaiak és jelöljük a középpontjaikat $O_1, O_2, \ldots, O_n$-nel. Határozd meg az $O_1O_2 + O_2O_3 + \ldots + O_{n-1}O_n$ összeg legkisebb értékét és határozd meg az n kis kocka azon elhelyezkedéseit, amelyekre az előbbi összeg ezt a legkisebb értéket eléri!

Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.