MINISTERUL EDUCAȚIEI
Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2022. március 26.

IX. osztály

1. feladat. Az $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ függvény teljesíti az

$$\frac{x^3 + 3x^2 f(y)}{x + f(y)} + \frac{y^3 + 3y^2 f(x)}{y + f(x)} = \frac{(x+y)^3}{f(x+y)},$$

összefüggést, bármely $x, y \in \mathbb{N}^*$ esetén.

a) Igazold, hogy $f(1) = 1$.

b) Határozd meg az f függvényt.

Gazeta Matematică

2. feladat. a) Bizonyítsd be, hogy $2x^3 - 3x^2 + 1 \geqslant 0$, bármely $x \geqslant 0$.

b) Igazold, hogy ha az x, y, z pozitív valós számok teljesítik a

$$\frac{2}{1+x^3} + \frac{2}{1+y^3} + \frac{2}{1+z^3} = 3$$

összefüggést, akkor

$$\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1-y}{1-y+y^2} + \frac{1-z}{1-z+z^2} \geqslant 0.$$

3. feladat. a) Határozd meg a $3^x = x + 2$ egyenlet összes megoldását a természetes számok halmazából.

b) Határozd meg azokat az (x, y) természetes számokból álló számpárokat, amelyekre az $x + 3^y$ és $y + 3^x$ számok egymás után következő egész számok.

4. feladat. A sík egy hatelemű ponthalmazára azt mondjuk, hogy *felosztható*, ha az elemeit jelölhetjük az A, B, C, D, E, F betűkkel úgy, hogy az ABC és a DEF háromszögek súlypontja ugyanaz a pont legyen.

a) Adjál példát egy felosztható halmazra!

b) Bizonyítsd be, hogy ha egy síkbeli ponthalmaz legalább 7 pontot tartalmaz, akkor van olyan részhalmaza, amely **nem** felosztható!

Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.