MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice
din România

Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2022. március 26.

X. osztály

1. feladat. Határozd meg az összes $x \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ számot, amelyre:

$$\log_x(1-x) + \log_2 \frac{1-x}{x} = \frac{1}{(\log_2 x)^2}.$$

2. feladat. A z_1, z_2, z_3 egységmodulusú komplex számokra

$$|z_i - z_j| \geqslant \sqrt{2}, \text{ bármely } i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j.$$

Bizonyítsd be, hogy $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leqslant 3$.

Gazeta Matematică

3. feladat. Az $n \geq 4$ természetes számot *érdekesnek* nevezzük, ha létezik legalább egy olyan egységmodulusú z komplex szám, amelyre $1 + z + z^2 + z^{n-1} + z^n = 0$.
Határozd meg, hogy hány olyan érdekes szám van, amely nem nagyobb, mint 2022.

4. feladat. Határozd meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$f\big(f(y-x) - xf(y)\big) + f(x) = y \cdot \big(1 - f(x)\big), \text{ bármely } x, y \in \mathbb{R}.$$

Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.