MINISTERUL EDUCAȚIEI
Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2022. március 26.

XI. osztály

1. feladat. Az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül az

$$\inf_{x>a} f(x) = g(a) \text{ és } \sup_{x<a} g(x) = f(a)$$

összefüggés, bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy ha az f függvény Darboux-tulajdonságú, akkor az f és g függvények folytonosak és egymással egyenlők.

Gazeta Matematică, enunț modificat

2. feladat. Az $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrixok teljesítik az $A^2 + B^2 = O_3$ összefüggést. Igazold, hogy $\det(aA + bB) = 0$, bármely a és b valós számok esetén!

3. feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot az $x_1 = 1$ kezdőértékkel és az

$$x_{n+1} = \frac{x_1}{n+1} + \frac{x_2}{n+2} + \ldots + \frac{x_n}{2n},$$

bármely $n \in \mathbb{N}^*$ rekurzióval értelmezzük. Az $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozatra $y_n = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Igazold, hogy:

a) $x_{n+1}^2 < \dfrac{y_n}{2}$ és $y_{n+1} < \dfrac{2n+1}{2n+2}\, y_n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

4. feladat. Legyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ahol $n \geq 2$. Jelölje m a $\left\{\text{rang}(A^k) - \text{rang}(A^{k+1}) |\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$ halmaz elemeinek a számát. Igazold, hogy $n \geq \dfrac{m(m+1)}{2} - 1$.

Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására. Minden feladatra 7 pont szerezhető.