MINISTERUL EDUCAȚIEI
Societatea de Științe Matematice din România

Országos Matematika Olimpia
Megyei forduló - 2022. március 26.

XII. osztály

1. feladat. Az $(M, \cdot)$ monoidban e a monoid semleges eleme és $a \in M$ egy invertálható elem. Igazold, hogy:

a) Az $M_a = \{x \in M \mid ax^2a = e\}$ halmaz nem üreshalmaz;

b) Ha $b \in M_a$ egy invertálható elem, akkor $b^{-1} \in M_a$ pontosan akkor teljesül, ha $a^4 = e$;

c) Ha $(M_a, \cdot)$ monoid, akkor $x^2 = e$, bármely $x \in M_a$.

Gazeta Matematică

2. feladat. $(G, \cdot)$ egy csoport és $H \neq G$ egy olyan részcsoportja, amelyre $x^2 = y^2$, bármely $x, y \in G \setminus H$. Bizonyítsd be, hogy $(H, \cdot)$ egy kommutatív csoport.

3. feladat. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \ldots \cdot \cos(nx)\, dx$$

számot. Határozd meg azokat az n értékeket, amelyekre $I_n = 0$.

4. feladat. $I \subseteq \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum és $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton függvény. Bizonyítsd be, hogy bármely $c \in I$ esetén létezik $a, b \in I$ úgy, hogy $c \in (a, b)$ és

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Munkaidő 3 óra + 30 perc a feladatok kijelentésével kapcsolatos kérdések megválaszolására.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.