IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

V. osztály

1. feladat (10 pont). Adottak az $a = 1011 \cdot [2022^0 \cdot (4 + 4 \cdot 5^2) - (2222 : 22 - 1^{2022})] : 2$, valamint a $b = 2018 \cdot 1013 + 2018 \cdot 1009 + 2022 \cdot 4$ kifejezések.

a) Számítsd ki az a értékét!

b) Ellenőrizd az $a^2 = b$ egyenlőséget! *Mátyás Beáta, Szatmárnémeti*

Megoldás. Az a kiszámításának érdekében sorra végezhetjük a következő műveleteket:

$$\begin{aligned} a &= 1011 \cdot [1 \cdot (4 + 4 \cdot 25) - (2222 : 22 - 1)] : 2 && \textbf{(1 pont)} \\ &= 1011 \cdot (104 - 100) : 2 && \textbf{(2 pont)} \\ &= 1011 \cdot 4 : 2 = 2022. && \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

Hasonlóan, a b esetén a következő módon járhatunk el:

$$\begin{aligned} b &= 2018 \cdot 1013 + 2018 \cdot 1009 + 2022 \cdot 4 \\ &= 2018 \cdot (1013 + 1009) + 2022 \cdot 4 && \textbf{(2 pont)} \\ &= 2018 \cdot 2022 + 2022 \cdot 4 = 2022 \cdot (2018 + 4) && \textbf{(1 pont)} \\ &= 2022 \cdot 2022 = 2022^2. && \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

Az eddigi eredményeket összesítve kapjuk, hogy $a^2 = 2022^2 = b$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont).

a) Írd fel 10 hatványaként a $2^{22} \cdot 25^{11}$ számot!

b) Határozd meg az $A = 2^{2022} \cdot 25^{1011} - 2022$ szám számjegyeinek összegét!

Szász Szilárd, Marosvásárhely

Megoldás. a) Vegyük észre, hogy $25 = 5^2$. **(1 pont)**

Innen a hatványozási szabályok alapján $25^{11} = (5^2)^{11} = 5^{22}$. **(1 pont)**

Mivel a hatványkitevők közösek, ezért a $2^{22} \cdot 5^{22} = (5 \cdot 2)^{22}$. **(1 pont)**

Végül írhatjuk, hogy $2^{22} \cdot 25^{11} = 10^{22}$. **(1 pont)**

b) Az előző alponthoz hasonlóan a következő átalakításokat végezhetjük el:

$$\begin{aligned} A &= 2^{2022} \cdot 25^{1011} - 2022 = 2^{2022} \cdot 5^{2022} - 2022 && \textbf{(1 pont)} \\ &= (2 \cdot 5)^{2022} - 2022 && \textbf{(1 pont)} \\ &= 10^{2022} - 2022. && \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $10^{2022} = 1\underbrace{0\ldots0}_{2022\,\text{db.}}$, az $A = 1\underbrace{0\ldots0}_{2022\,\text{db.}} - 2022 = \underbrace{9\ldots9}_{2018\,\text{db.}}7978$ **(1 pont)**

eredményhez jutunk. Az A számjegyeinek összege tehát $9 \cdot 2018 + 7 + 9 + 7 + 8 = 18193$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Az ötödik osztályban tanuló 11 fiú tornaórán kosárlabdázik két 5 fős csapatban és 1 tartalék játékossal. A pólójukon a 3, 11, 17, 31, 44, 47, 50, 51, 54, 59 és 87 számok láthatóak. A szurkoló lányok között Bogi nemcsak a sportot szereti, hanem jó matekos is, így észreveszi, hogy az egyik csapatban játszó fiúk pólóján álló számok összege kétszer akkora, mint a másik csapat játékosainak pólóján álló számok összege.

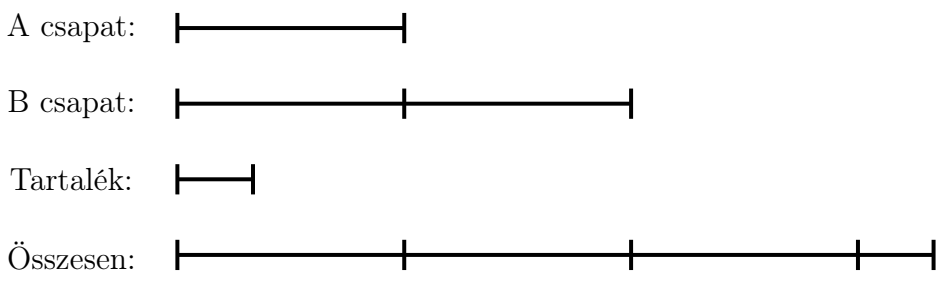
a) Határozd meg a tartalék játékos pólóján látható számot!

b) Határozd meg, hogy hányas számú játékosok vannak az egyik, illetve a másik csapatban!

Matlap 1/2022 A: 4489

Megoldás.

a) Legyen a két csapat A és B úgy, hogy a B csapathoz tartozó számok összege kétszerese az A csapathoz tartozó számok összegének. A következő ábrán a szakaszok a pólókon lévő számok összegeit jelképezik.



(**1 pont**)

Az összes szám összege 454. A fenti ábra alapján, ha ebből a számból kivonjuk a tartalék játékos számát, egy hárommal osztható számot kapunk. (**1 pont**)

A tartalék játékos számát innen két úton is meghatározhatjuk:

– vagy megnézzük, hogy 454-ből levonva a lehetséges mezszámokat melyik eredmény lesz hárommal osztható;

– vagy pedig megnézzük, hogy a lehetséges mezszámok közül melyik az, amelynek a hárommal való osztási maradéka ugyanannyi, mint a 454-nek (ami 1).

Mindkét gondolatmenettel azt kapjuk, hogy a tartalék játékos a 31-es pólót viseli. (**2 pont**)

b) Az A csapathoz tartozó számok összege $(454 - 31) : 3 = 141$, a B csapatnál ez az összeg kétszer akkora, vagyis 282. (**1 pont**)
A B csapat esetében az öt szám összege 282, ami páros. Öt szám összege akkor lehet páros, ha az összeadandók között egy, három vagy öt páros. A megadott 11 mezszám között csak három páros van, ezért az összeadandók között egy vagy három páros szám kell legyen. (**1 pont**)

Ha az öt összeadandó között csak egy páros van, akkor ez 44, 50 vagy 54 kell legyen. Ha ez a szám 54, akkor a legnagyobb képezhető összeg $87 + 59 + 54 + 51 + 47 = 298 > 282$, a második legnagyobb képezhető összeg pedig $87 + 59 + 54 + 51 + 17 = 268 < 282$. Innen látható, hogy a páros szám nem lehet az 54. Hasonlóan gondolkodva jutunk arra a következtetésre, hogy sem a 44, sem pedig az 50 nem lehet az egyetlen páros szám a B csapat pólóin. (**2 pont**)

Tehát mindhárom páros számnak kell szerepelnie a B-hez tartozó mezeken, és ezeknek a számoknak az összege $44 + 50 + 54 = 148$. Mivel $282 - 148 = 134$, ezért a fennmaradó két páratlan mezszám összege 134. A megadott mezszámokból ez csak úgy jöhet ki, ha a 87-et és a 47-et választjuk.

Összegezve, az A csapatban játszó fiúk pólóin a számok a 3, 11, 17, 51 és 59, valamint a B csapat esetén ezek a mezszámok 44, 47, 50, 54 és 87. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Megjegyzés. A b) alpont megoldásában szereplő tárgyalás elvégezhető analóg módon a másik csapatban lévő páratlan mezszámok szerint.

4. feladat (10 pont)**.** Egy osztályban 8 tanuló ceruzát gyűjt, mindegyiküknek legalább 3 ceruzája van. A táblára felírták egymás mellé balról jobbra a nyolc tanuló nevét, a ceruzáik számának növekvő sorrendjében. Észrevették, hogy Bercit kivéve, mindenkinek annyi ceruzája van, ahány az előtte levőknek összesen.

a) Számítsd ki, hogy hányszor több ceruzája van a jobbról harmadik tanulónak, mint a balról számított harmadiknak!

b) A táblán van két egymás melletti tanuló, akik közül egyiknek 8-cal több ceruzája van, mint a másiknak. Határozd meg, hogy legtöbb hány ceruzája lehet a jobb szélső tanulónak!

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. a) A lista bal szélső tagja csak Berci lehet, mert a bal szélsőnek legalább 3 ceruzája van, míg az előtte lévőknek egy sincs. (**1 pont**)
Így a Berci után következőnek pont annyi ceruzája van, mint Bercinek. (**1 pont**)
Ha a Berci ceruzáinak a száma x, akkor a táblán balról jobbra a diákok ceruzáinak száma rendre

$$x,\ x,\ 2x,\ 4x,\ 8x,\ 16x,\ 32x,\ 64x.$$ (**1 pont**)

Innen látható, hogy a jobbról harmadik diáknak $\frac{16x}{2x} = 8$-szor több ceruzája van, mint balról a harmadiknak. (**1 pont**)

b) Írjuk a táblára a diákok nevei közé a ceruzáik száma közötti különbségeket! Az így kapott számok rendre

$$0,\ x,\ 2x,\ 4x,\ 8x,\ 16x,\ 32x.$$

A feltétel szerint ezeknek a számoknak az egyike 8. (**2 pont**)
Mivel $x \geq 3$, ezért csak az $x = 8$, vagy a $2x = 8$ eset lehetséges. A jobb szélső diáknak $64x$ ceruzája van, ami akkor a lehető legnagyobb, ha x a lehető legnagyobb, vagyis ha $x = 8$. (**2 pont**)
Az előbbi következtetések alapján a jobb szélső diáknak legtöbb $64 \cdot 8 = 512$ ceruzája lehet. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■