IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

VI. osztály

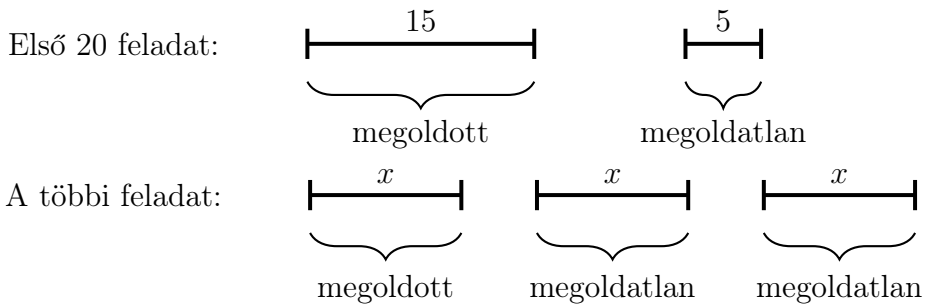
1. feladat (10 pont)**.** Egy matematikaversenyen minden megoldott feladat egy pontot ér, a megoldatlanok pedig nullát.

a) Zsófi az első 20 feladatból 15-öt oldott meg, a többi feladatnak pedig az egyharmadát oldotta meg, ezáltal 50%-os eredményt ért el. Határozd meg, hogy hány feladat volt kitűzve a versenyen!

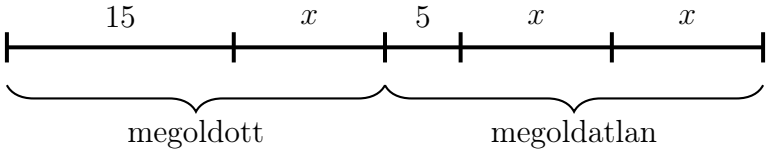
b) Csaba a verseny első órájában megoldotta a feladatok 48%-át, a második órában pedig 25%-kal kevesebbet, mint az első órában. Határozd meg, hogy a feladatok hány százaléka maradt a harmadik órára!

Báró Emőke, Székelyudvarhely
Hodgyai Edit, Micske

Első megoldás. a) Ábrázoljuk szakaszokkal a megoldott és megoldatlan feladatok számát! Legyen x az első 20 feladat után a helyes megoldások száma, ez az első 20 feladat utáni feladatok harmada. Következésképpen három darab x hosszúságú szakaszt kell ábrázolnunk, ahol egy a megoldott, kettő pedig a megoldatlan feladatoknak felel meg.



Egy egyenesen elhelyezve, majd bal oldalra csoportosítva a megoldott feladatokhoz tartozó szakaszokat, a következő ábrát kapjuk:



(2 pont)

A feltétel szerint Zsófi a feladatok felét oldotta meg, így az ábra alapján $15+x = 5+2x$, azaz $x = 10$. **(2 pont)**

Tehát összesen $15 + 5 + 3 \cdot 10 = 50$ feladat volt a versenyen. **(1 pont)**

b) Csaba az első órában megoldotta a feladatok 48%-át. A második órában megoldotta a 48%-nak a $100\% - 25\% = 75\%$-át. Mivel

$$\frac{48}{100} \cdot \frac{75}{100} = \frac{3600}{10000} = \frac{36}{100},$$

ezért az összes feladat 36%-át oldotta meg a második órában. **(2 pont)**
Így a harmadik órára a feladatok $100\% - (48\% + 36\%) = 16\%$-a maradt hátra. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**
■

Második megoldás. a) Jelölje x a versenyen kitűzött feladatok számát. Összeszámolva Zsófi pontszámát, írhatjuk, hogy

$$15 + (x - 20) \cdot \frac{1}{3} = \frac{x}{2}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Közös nevezőre hozva a törteket, kapjuk, hogy

$$\frac{90}{6} + \frac{2x - 40}{6} = \frac{3x}{6}.$$

Összevonva a törteket, majd beszorozva a közös nevezővel, következik, hogy

$$90 + 2x - 40 = 3x,$$

vagyis $x = 50$. **(2 pont)**
Tehát a versenyen 50 feladat volt. **(1 pont)**

b) Csaba az első órában megoldotta a feladatok 48%-át, vagyis 24 feladatot. **(1 pont)**
A második órában a 24 feladat $100\% - 25\% = 75\%$-át, azaz 18 feladatot oldott meg. **(1 pont)**
Tehát a harmadik órára $50 - (24 + 18) = 8$ feladat maradt hátra. **(1 pont)**
A 8 feladat az összes feladat 16%-át jelenti. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont)**.** Egy iskolában 5 elemi osztályban tanulnak a diákok, mindegyik osztályban legalább 10, legfeljebb 20 tanuló van, és a tanulók $\frac{1}{3}$ része fiú. A testnevelés órákon a fiúk negyede focizni szokott, a lányok $\frac{5}{6}$ része pedig kézilabdázik. Határozd meg, hogy hány lány van az iskolában!

Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. Legyen x a tanulók száma az iskolában. Mindegyik osztályban legalább 10 tanuló van, ezért $5 \cdot 10 \leq x$, valamint legfeljebb 20 tanuló van, így $x \leq 5 \cdot 20$. Tehát $50 \leq x \leq 100$. **(1 pont)**
Tudjuk, hogy a tanulók $\frac{1}{3}$ része fiú, továbbá a fiúk negyede focizni szokott, így a tanulók $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ része focizó fiú, azaz $x \vdots 12$. **(2 pont)**
Hasonlóan, a tanulók $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ része lány és a lányok $\frac{5}{6}$ része kézilabdázik, így a tanulók $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$ része kézilabdázó lány. Innen következik, hogy $x \vdots 9$, mert $\frac{5}{9}$ egy irreducibilis tört. **(2 pont)**
Mivel a tanulók száma osztható 9-cel és 12-vel, ezért osztható lesz a legkisebb közös többszörösükkel is, vagyis $[9, 12] = 36$-tal. Tehát $x \vdots 36$. **(2 pont)**
Mivel $50 \leq x \leq 100$, ezért $x = 72$. **(1 pont)**
Ez alapján a lányok száma $72 \cdot \frac{2}{3} = 48$. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

3. feladat (10 pont)**.** Az $\widehat{AOA_1} = 2^\circ, \widehat{A_1OA_2} = 3^\circ, \widehat{A_2OA_3} = 4^\circ, \ldots, \widehat{A_{n-1}OA_n} = (n+1)^\circ$ egymás melletti szögek összege 135°.

a) Határozd meg a kijelentésben szereplő egymás melletti szögek n számát!

b) Ha az OM félegyenes az $\widehat{A_4OA_{10}}$ szögfelezője, számítsd ki az $\widehat{A_3OM}$ mértékét!

Orbán Ilona Kármen, Berettyószéplak

Megoldás. a) A feltétel szerint

$$\widehat{AOA_1} + \widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + \ldots + \widehat{A_{n-1}OA_n} = 135^\circ.$$

A szögek mértékét behelyettesítve, írhatjuk, hogy

$$2 + 3 + \ldots + (n+1) = 135. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hozzáadva 1-et mindkét oldalhoz, kapjuk, hogy

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) = 136,$$
$$\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = 136, \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$(n+1)(n+2) = 272. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel a $272 = 16 \cdot 17$ számot csak egyféleképpen lehet felírni két egymás utáni természetes szám szorzataként, ezért $n + 1 = 16$, ahonnan $n = 15$. Tehát 15 darab egymás melletti szög van.**(2 pont)**

Megjegyzés. A fent megjelenő összeg kiszámolható direkt módon, a $2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{n(n+3)}{2}$ képlettel. Ez egyenlő kell legyen 135-tel, ahonnan $n(n+3) = 270 = 15 \cdot 18$. Tehát $n = 15$.

Megjegyzés. A szögek számát kézzel is ki tudjuk számolni. Ehhez tekintsük a következő táblázatot, ahol az első sor tartalmazza a szögek számát, alatta ugyanabban az oszlopban a hozzátartozó szög mértékét fokban, és ez alatt az illető szögig a szögek mértékének az összegét, szintén fokban. Látható, hogy a 15-ik szög esetén lesz a szögek összmértéke 135°. Ez a megoldás, illetve az ehhez hasonló helyes gondolatmenetek szintén 5 pontot érnek.

Szögek száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Szög mértéke	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Szögek összmértéke	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104	119	135

b) Tudjuk, hogy

$$\widehat{A_4OA_{10}} = \widehat{A_4OA_5} + \widehat{A_5OA_6} + \ldots + \widehat{A_9OA_{10}},$$

mivel a szögek egymás melletti szögek. Továbbá $\widehat{A_4OA_5} = 6^\circ$, $\widehat{A_5OA_6} = 7^\circ, \ldots,$ $\widehat{A_9OA_{10}} = 11^\circ$. **(1 pont)**

Behelyettesítve a szögek mértékét, írhatjuk, hogy

$$\widehat{A_4OA_{10}} = 6^\circ + 7^\circ + \ldots + 11^\circ = 51^\circ. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az OM félegyenes az $\widehat{A_4OA_{10}}$ szögfelezője, tehát

$$\widehat{A_4OM} = \widehat{MOA_{10}} = 51^\circ : 2 = 25^\circ 30'. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$\widehat{A_3OM} = \widehat{A_3OA_4} + \widehat{A_4OM} = 5^\circ + 25^\circ 30' = 30^\circ 30'. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

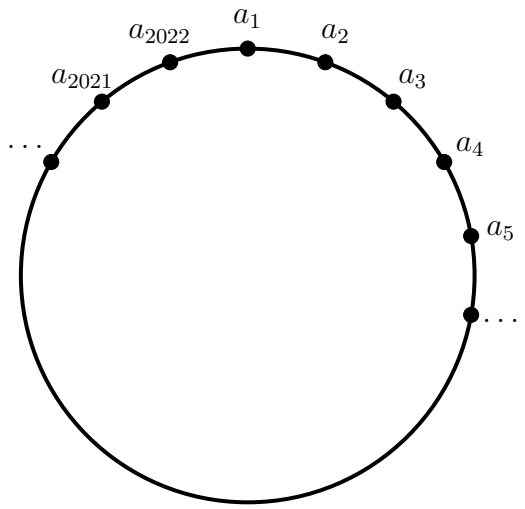
Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Egy sportrendezvényen 2022 személy vesz részt, melyek életkorának összege 3^{10}. A rendezvény végén mindannyian körbeállnak a stadionban. Igazold, hogy bárhogy helyezkednek el a kör mentén a résztvevők, mindig van három egymás mellett álló személy, amelyek életkorának összege nagyobb, mint 81 év!

Zajzon Csaba, Barót
Hodgyai Edit, Micske
Matlap 1/2022 A: 4493

Első megoldás. Egy tetszőleges személytől elindulva és haladva az óramutató járásával megegyező irányban, jelöljük a körben álló személyek életkorát rendre $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$-vel. (Lásd a mellékelt ábrát.)



A lehetetlenre való visszavezetés módszerével dolgozunk. Feltételezzük, hogy bármely három egymás mellett álló személy életkorának összege nem több, mint 81 év. **(1 pont)**
A következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &\leq 81, \\ a_2 + a_3 + a_4 &\leq 81, \\ a_3 + a_4 + a_5 &\leq 81, \\ &\vdots \\ a_{2020} + a_{2021} + a_{2022} &\leq 81, \\ a_{2021} + a_{2022} + a_1 &\leq 81, \\ a_{2022} + a_1 + a_2 &\leq 81. \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Összeadva az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait, kapjuk, hogy

$$3 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + 3 \cdot a_{2022} \leq 2022 \cdot 81. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$3 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2022}) \leq 2022 \cdot 81,$$

ahonnan

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2022} \leq 2022 \cdot 27. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Figyelembe véve, hogy az összes személy életkorának összege 3^{10}, illetve $27 = 3^3$, kapjuk, hogy $3^{10} \leq 2022 \cdot 3^3$. Felhasználva a $3^{10} = 3^7 \cdot 3^3$ azonosságot, a

$$3^7 \cdot 3^3 \leq 2022 \cdot 3^3$$

egyenlőtlenséghez jutunk. **(2 pont)**
Ez pontosan akkor áll fenn, ha $3^7 \leq 2022$, vagyis ha $2187 \leq 2022$. Mivel ez az egyenlőtlenség hamis, így helytelen a feltételezésünk. Tehát mindig van három egymás mellett álló személy, amelyek életkorának összege nagyobb, mint 81 év. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

Második megoldás. Használjuk az első megoldás során bevezetett jelöléseket. A körbeállított 2022 személyt egymásmelletti hármas csoportokra osztjuk:

$$(a_1, a_2, a_3), \quad (a_4, a_5, a_6), \quad \ldots, \quad (a_{2020}, a_{2021}, a_{2022}). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Összesen 674 csoportot kaptunk. **(1 pont)**
Ha mindegyikben legfeljebb 81 év az életkorok összege, akkor az összes résztvevő életkorának összege nem nagyobb, mint $81 \cdot 674$. **(4 pont)**
Viszont $81 \cdot 674 < 3^{10}$, tehát kell legyen olyan csoport, ahol az életkorok összege nagyobb, mint 81. **(3 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■