# IV. országos magyar matematikaolimpia
# XXXI. EMMV
### megyei szakasz, 2022. március 5.
## VII. osztály

**1. feladat** (10 pont). Állapítsd meg, hogy az $A \cdot B$ racionális szám-e, ha

$$A = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^{-1}$$

és

$$B = \sqrt{\frac{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \ldots + 2022 \cdot 6066 \cdot 18198}{1 \cdot 5 \cdot 25 + 2 \cdot 10 \cdot 50 + 3 \cdot 15 \cdot 75 + \ldots + 2022 \cdot 10110 \cdot 50550}}.$$

*Fülöp Edith, Brassó*

*Megoldás.* Az $A$ számra teljesül, hogy

$$A = \left(\frac{5\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$= \frac{8\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{5}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A $B$ szám értéke

$$B = \sqrt{\frac{1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot (1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + \ldots + 2022 \cdot 2022 \cdot 2022)}{1 \cdot 5 \cdot 25 \cdot (1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + \ldots + 2022 \cdot 2022 \cdot 2022)}} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Így

$$A \cdot B = 8\sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{24\sqrt{3}}{5} \notin \mathbb{Q}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

**2. feladat** (10 pont). Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$3x + y - 2xy = 0.$$

*Budacsek Terézia, Arad*

*Megoldás.* Egyenértékű átalakításokat végezve, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} 3x + y - 2xy &= 0, \\ y - 2xy &= -3x, \\ y(1-2x) &= -3x, \\ y &= \frac{3x}{2x-1}, \end{aligned}$$

mivel $2x - 1 \neq 0$, bármely $x \in \mathbb{Z}$ esetén. **(3 pont)**
Másrészt, $y \in \mathbb{Z}$ és $(x, 2x-1) = 1$, ezért $(2x-1) \mid 3$. **(2 pont)**
Innen rendre az alábbi következtetéseket vonhatjuk le:

$$2x - 1 \in D_3 = \{-3; -1; 1; 3\}, \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$2x \in \{-2; 0; 2; 4\}, \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$x \in \{-1; 0; 1; 2\}, \quad \textbf{(1 pont)}$$

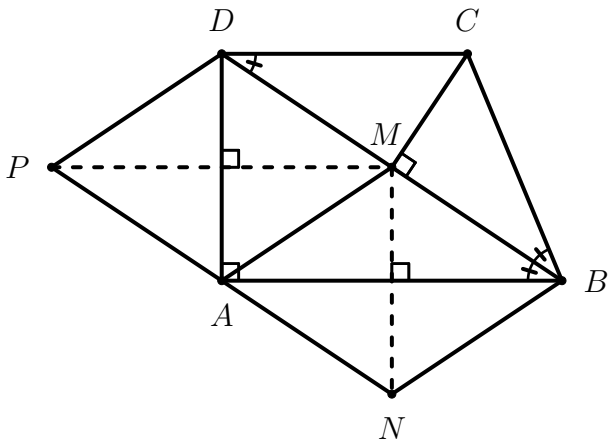
Tehát a megoldások $(x, y) \in \{(-1, 1); (0, 0); (1, 3); (2, 2)\}$. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

**Megjegyzés.** Minden indoklás nélkül megtalált és leellenőrzött megoldásért 1 pont jár. Maximálisan 4 pont adható, ha nincs igazolva, hogy több megoldás nem létezik.

**3. feladat** (10 pont)**.** Az $ABCD$ derékszögű trapézban $AB \parallel CD$, $AB > CD$, a $BD$ átló a trapéz $B$ hegyesszögének szögfelezője. Legyen $CM \perp BD$, $M \in BD$, és legyen $N$, illetve $P$ az $M$ pont $AB$ és $AD$ szerinti szimmetrikusa. Igazold, hogy:

a) $P$, $A$, $N$ kollineáris pontok;
b) $BDPN$ négyszög paralelogramma! *Matlap 10/2021 A: 4479*

*Első megoldás.* a) Elkészítjük a következő ábrát. **(1 pont)**




Az $MAP$ háromszögben $AD$ oldalfelező merőleges, tehát szögfelező is. Így $\widehat{MAD} \equiv \widehat{DAP}$. Hasonlóan, az $MAN$ háromszögben $AB$ oldalfelező merőleges, tehát szögfelező is. Így $\widehat{MAB} \equiv \widehat{BAN}$. **(2 pont)**

Az előbbi összefüggések alapján

$$\widehat{PAD} + \widehat{DAM} + \widehat{MAB} + \widehat{BAN} = 2\left(\widehat{DAM} + \widehat{MAB}\right) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Tehát $P, A$ és $N$ kollineárisak. **(2 pont)**

b) Mivel $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BDC}$ (belső váltószögek) és $\widehat{ABD} \equiv \widehat{DBC}$ (a $DB$ szögfelező), ezért a $CDB$ egyenlő szárú háromszög. Tehát a $CM$ magasság egyben oldalfelező is, és így $DM = MB$.

Az $MDP$ háromszögben a $DA$ oldalfelező merőleges, tehát szögfelező is. Így $\widehat{MDA} \equiv \widehat{ADP}$ és $DP = DM$. Hasonlóan, az $MBN$ háromszögben a $BA$ oldalfelező merőleges, tehát szögfelező is. Így $\widehat{MBA} \equiv \widehat{ABN}$ és $MB = BN$.

Az előbbi észrevételek alapján $PD = DM = MB = BN$. **(2 pont)**
Ugyanakkor,

$$\widehat{PDM} + \widehat{MBN} = 2\left(\widehat{ADM} + \widehat{MBA}\right) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

tehát $PD \parallel BN$.

Beláttuk, hogy a $BDPN$ négyszögben két szemben fekvő oldal párhuzamos és kongruens, tehát a négyszög paralelogramma. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**
■

*Második megoldás.* a) Elkészítjük az ábrát. **(1 pont)**
Mivel $AB \parallel CD$, $BD$ szelő, ezért $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BDC}$ (belső váltószögek). Másrészt $\widehat{ABD} \equiv \widehat{DBC}$, hiszen $BD$ szögfelezője $\widehat{ABC}$-nek, így $\widehat{BDC} \equiv \widehat{DBC}$. Innen következik, hogy a $BCD$ háromszög egyenlő szárú, vagyis $CD = CB$.

A $BCD$ egyenlő szárú háromszögben a $CM$ magasság egyben oldalfelező is, azaz $DM = MB$. A $DAB$ háromszögben $\widehat{A} = 90^\circ$, $AM$ az átfogóhoz tartozó oldalfelező, ezért $AM = MB = MD$.
**(2 pont)**
Tudjuk, hogy $N$ az $M$ pontnak az $AB$-re vonatkozó szimmetrikusa. Ebből következik, hogy $AB$ felezőmerőlegese az $MN$ szakasznak, azaz $AM = AN$ és $BM = BN$. Mivel $AM = MB$, így $ANBM$ rombusz, ahonnan azt kapjuk, hogy $AN \parallel BM$, tehát $AN \parallel BD$.

Hasonlóan bizonyítható, hogy $AD$ felezőmerőlegese az $MP$ szakasznak, így $PD = DM$ és $PA = AM$. Mivel $AM = MD$, így $AMDP$ rombusz, így $PA \parallel DM$, ezért $PA \parallel BD$.

A $PA \parallel BD$ és $AN \parallel BD$ összefüggésekből következik, hogy $P, A, N$ kollineáris pontok, mivel egy egyeneshez egy külső pontból egyetlen párhuzamos húzható. **(2 pont)**

b) Az előző alpont alapján $ANBM$ rombusz, ezért $AM \parallel BN$ és $AM = BN$. Hasonló módon $AMDP$ rombusz, tehát $AM \parallel PD$ és $AM = PD$. **(2 pont)**
Ezekből következik, hogy $BN \parallel PD$ és $BN = PD$, tehát $BDPN$ paralelogramma. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**
■

*Harmadik megoldás az a) alpontra.* Elkészítjük az ábrát. **(1 pont)**
Az első megoldást követve eljutunk addig, hogy $DM = MB$. Legyen $MN \cap AB = \{E\}$, és $MP \cap AD = \{F\}$. Az $ME \parallel AD$ és $DM = MB$ összefüggésekből következik, hogy $ME$ középvonal az $ABD$ háromszögben, tehát $AE = EB$. Hasonlóan, az $MF \parallel AB$ és $DM = MB$ összefüggésekből következik, hogy $MF$ is középvonal az $ABD$ háromszögben, így $AF = FD$. **(2 pont)**
Az $ANBM$ négyszögben $AE = EB$, $ME = EN$ és $MN \perp AB$, vagyis $ANBM$ rombusz. Az $AMDP$ négyszögben $AF = FD$, $MF = FP$ és $MP \perp AD$, tehát $AMDP$ rombusz. Mivel a rombusz átlói szögfelezők, így $\widehat{MAE} = \widehat{EAN} = x$ és $\widehat{MAF} = \widehat{FAP} = y$. Innen következik, hogy

$\widehat{NAP} = \widehat{NAM} + \widehat{MAP} = 2x + 2y = 2(x+y) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, tehát $P, A, N$ kollineáris pontok. **(2 pont)**

■

*Negyedik megoldás az a) alpontra.* Elkészítjük az ábrát. **(1 pont)**

Legyen $MN \cap AB = \{E\}$ és $MP \cap AD = \{F\}$. Mivel $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$, ezért az $AFME$ négyszög téglalap. Ebből következik, hogy $AF = ME$ és $FM = AE$. Mivel $ME = EN$ és $FM = FP$, így $FP = AE$ és $FA = EN$. Végül, tudjuk, hogy $\widehat{PFA} = \widehat{AEN} = 90^\circ$, tehát $PFA_\Delta \equiv AEN_\Delta$. **(2 pont)**

A két háromszög kongruenciájából következik, hogy $\widehat{FPA} \equiv \widehat{EAN}$. Viszont $\widehat{FPA} + \widehat{FAP} = 90^\circ$, ezért azt kapjuk, hogy $\widehat{EAN} + \widehat{FAP} = 90^\circ$. Az előbbi eredmények alapján

$$\widehat{PAN} = \widehat{PAF} + \widehat{FAE} + \widehat{EAN} = 180^\circ,$$

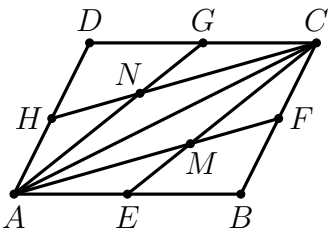
tehát $P, A, N$ kollineáris. **(2 pont)**

■

**4. feladat** (10 pont)**.** Az $ABCD$ paralelogrammában legyen $E, F, G$ és $H$ rendre az $AB$, $BC$, $CD$ és $DA$ oldalak felezőpontja. Legyen $AF \cap CE = \{M\}$, valamint $AG \cap CH = \{N\}$. Számítsd ki az $ABCD$ paralelogramma területének és az $AMCN$ négyszög területének arányát!

*Gödri Judith, Sepsiszentgyörgy*

*Megoldás.* Elkészítjük az alábbi ábrát, amelyen behúzzuk az $AC$ átlót. **(1 pont)**




Mivel $ABCD$ paralelogramma, következik, hogy

$$T_{ABC} = T_{ADC} = \frac{1}{2} T_{ABCD}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Az $ABC$ háromszögben $CE$ oldalfelező, így

$$T_{ACE} = T_{BCE} = \frac{1}{2} T_{ABC}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Az előző két összefüggés alapján

$$T_{ACE} = \frac{1}{4} T_{ABCD}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $M$ súlypont az $ABC$ háromszögben, tudjuk, hogy $\frac{MC}{ME} = \frac{2}{1}$, ezért $\frac{T_{AMC}}{T_{AME}} = \frac{2}{1}$, ahonnan

$$T_{AMC} = \frac{2}{3} T_{ACE}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Az utolsó két egyenlőségből következik, hogy

$$T_{AMC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} T_{ABCD} = \frac{1}{6} T_{ABCD}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$T_{ANC} = \frac{1}{6} T_{ABCD}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ahonnan

$$T_{AMCN} = T_{AMC} + T_{ANC} = \frac{1}{3} T_{ABCD}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

vagyis

$$\frac{T_{ABCD}}{T_{AMCN}} = 3. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■