IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.
VIII. osztály

1. feladat (10 pont). Adott az $a = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ kifejezés.

a) Határozd meg az a^2 értékét!

b) Számítsd ki a $(2\sqrt{5}-1-a)^{2022}$ kifejezés értékét!

c) Igazold, hogy $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^x + \left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^x \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$.

Kovács Melinda, Beszterce

Megoldás. a) Négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$a^2 = 9-4\sqrt{5}+2\sqrt{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}+9+4\sqrt{5} \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$= 18+2\sqrt{81-80} = 20. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

b) Az előző alpont alapján $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, tehát

$$(2\sqrt{5}-1-a)^{2022} = (2\sqrt{5}-1-2\sqrt{5})^{2022} = (-1)^{2022} = 1. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

c) Mivel

$$\sqrt{(9-4\sqrt{5})\cdot(9+4\sqrt{5})} = \sqrt{81-80} = 1,$$

ezért

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Bevezetve a

$$\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^x = t, \quad t>0 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

jelölést, azt kapjuk, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség rendre ekvivalens az alábbiakkal:

$$\begin{aligned} t+\frac{1}{t} &\geq 2, \\ t^2+1 &\geq 2t, \qquad \textbf{(1 pont)} \\ (t-1)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

viszont az utolsó egyenlőtlenség igaz, minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás az a) alpontra. A gyök alatti kifejezésekből teljes négyzeteket szeretnénk kialakítani. Keresünk olyan A és B számokat, amelyekre $A^2+B^2=9$ és $2AB = 4\sqrt{5}$. Egy lehetőség az $A=2$ és $B=\sqrt{5}$. Innen következik, hogy

$$9-4\sqrt{5} = (2-\sqrt{5})^2 \quad \text{és} \quad 9+4\sqrt{5} = (2+\sqrt{5})^2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(2+\sqrt{5})^2} \\ &= \left|2-\sqrt{5}\right|+\left|2+\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-2+2+\sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5}, \end{aligned}$$

mivel $2=\sqrt{4}<\sqrt{5}$. Tehát $a^2=20$. **(2 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.**

a) Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2xy+10x-3y=21.$$

b) Határozd meg az

$$E(x,y)=\sqrt{x^2-8x+20}+\sqrt{y^2+4y+13}, \quad x,y\in\mathbb{R}$$

kifejezés minimális értékét, valamint azon x és y számokat, amelyekre a kifejezés értéke egyenlő a minimumával!

Papp Ilonka, Brassó
Máthé Attila-István, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. a) Tényezőkre bontás után az egyenlet a következő alakban írható fel:

$$(2x-3)(y+5)=6. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $y+5$ egész szám és $2x-3$ páratlan egész szám, a következő esetek lehetségesek:

$$\begin{cases} 2x-3 &= -3 \\ y+5 &= -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-3 &= -1 \\ y+5 &= -6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-3 &= 1 \\ y+5 &= 6 \end{cases} \text{ vagy } \quad \begin{cases} 2x-3 &= 3 \\ y+5 &= 2 \end{cases}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Ezek alapján a megoldások

$$(x,y)\in\{(0,-7);(1,-11);(2,1);(3,-3)\}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

b) Tényezőkre bontás után kapjuk, hogy

$$E(x,y)=\sqrt{(x-4)^2+4}+\sqrt{(y+2)^2+9}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Tudjuk, hogy $(x-4)^2\geq 0$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén. Így $(x-4)^2+4\geq 4$ és $\sqrt{(x-4)^2+4}\geq 2$, valamint az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=4$. **(1 pont)**
Hasonló módon, $(y+2)^2\geq 0$, bármely $y\in\mathbb{R}$ esetén. Így $(y+2)^2+9\geq 9$ és $\sqrt{(y+2)^2+9}\geq 3$, valamint az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $y=-2$. **(1 pont)**
Tehát az $E(x,y)$ kifejezés minimális értéke $2+3=5$, és a kifejezés értéke pontosan akkor egyenlő a minimumával, ha $x=4$ és $y=-2$. **(1 pont)**

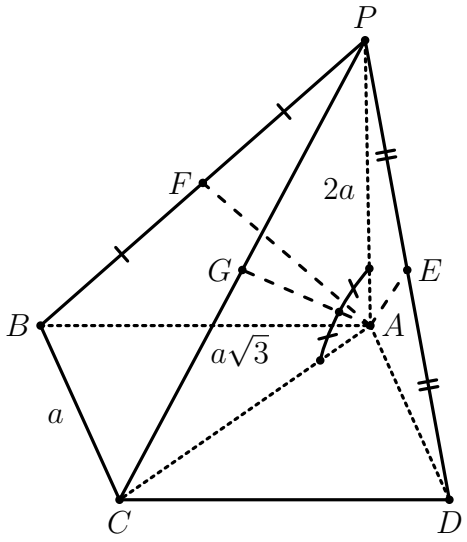
Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Adott egy $ABCD$ téglalap, ahol $AB = a\sqrt{3}$ és $BC = a$. Legyen P egy pont a téglalap síkján kívül úgy, hogy $PA = 2a$. Ha AE és AF oldalfelezők az ADP, illetve ABP háromszögben, valamint AG a $\widehat{PAC}$ szögfelezője, ahol $G \in PC$, akkor igazold, hogy $(EFG) \parallel (ABC)$.

Matlap 10/2021 A: 4484

Megoldás. Elkészítjük a következő ábrát. **(1 pont)**



Az ADP háromszögben AE oldalfelező, vagyis $PE = ED$. Hasonló módon, ABP háromszögben AF oldalfelező, azaz $PF = FB$. Innen következik, hogy EF középvonal a PBD háromszögben, így $EF \parallel BD$. **(2 pont)**

A feltétel szerint $ABCD$ téglalap, így az ABC háromszögben $\widehat{B} = 90°$. Pitagorasz tétele alapján

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 = 4a^2,$$

tehát $AC = 2a$. **(1 pont)**

Az $AC = AP = 2a$ összefüggések alapján PAC egyenlő szárú háromszög. **(1 pont)**

Ebből következik, hogy az AG szögfelező egyben oldalfelező is, azaz $PG = GC$. **(1 pont)**

Mivel $PE = ED$ és $PG = GC$, így EG középvonal a PDC háromszögben, vagyis $EG \parallel CD$. **(1 pont)**

A fentieket összefoglalva, mivel EF és EG, illetve BD és CD páronként metsző egyenesek, valamint $EF \parallel BD$ és $EG \parallel CD$, következik, hogy $(EFG) \parallel (ABC)$. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Két tanulónak 8 különböző könyvet osztunk szét.

a) Hányféleképpen oszthatjuk szét a könyveket?

b) Hányféleképpen oszthatjuk szét a könyveket úgy, hogy mindkét tanuló kapjon legalább egy könyvet?

c) Hányféleképpen oszthatjuk szét a könyveket úgy, hogy mindkét tanuló kapjon legalább két könyvet? *Mátéfi István, Marosvásárhely*

Megoldás. a) Az első könyvet kétféleképpen oszthatjuk ki a tanulók között. A második könyvet az előzőtől függetlenül szintén kétféleképpen oszthatjuk ki. Így a két könyvet összesen $2 \cdot 2 = 4$ féleképpen oszthatjuk ki. Három könyvet $2^2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ féleképpen oszthatunk ki.
A gondolatmenetet folytatva, nyolc könyvet $2^7 \cdot 2 = 2^8 = 256$ féleképpen oszthatunk ki. (**3 pont**)

b) Ahhoz, hogy mindkét tanuló legalább egy könyvet kapjon, az előbbi 256 esetből ki kell zárni azt a két esetet, amikor mind a 8 könyvet vagy az egyik, vagy a másik tanuló kapja. Tehát ekkor a lehetséges szétosztások száma $256 - 2 = 254$. (**2 pont**)

c) Ahhoz, hogy mindkét tanuló legalább két könyvet kapjon, az összes lehetséges 256 szétosztásból ki kell zárnunk azt a két esetet, amikor minden könyvet egy tanuló kap, illetve azokat az eseteket, amikor egyik tanuló pontosan egy, a másik pontosan hét könyvet kap. (**2 pont**)
Az utóbbi esetek száma $2 \cdot 8$, mivel kétféleképpen választhatjuk ki, hogy melyik diák kap pontosan egy könyvet, és ez a könyv bármelyik lehet a nyolcból. Tehát ebben az esetben a lehetséges szétosztások száma $256 - 2 - 16 = 238$. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)
■