IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

IX. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy az $x \in (-3,-1)$ és $y \in (1,4)$ valós számok esetén a

$$\sqrt{4x^2+4y^2-28x-28y+8xy+49}-2\sqrt{x^2+y^2-10x-10y+2xy+25}$$

kifejezés állandó! *(***)*

Megoldás. Észrevehető, hogy az első gyök alatt a $(2x+2y-7)^2$ szerepel, ezért

$$\sqrt{4x^2+4y^2-28x-28y+8xy+49}=\sqrt{(2x+2y-7)^2}=|2x+2y-7|. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $x \in (-3,-1)$ és $y \in (1,4)$, ezért $2x+2y-7 \in (-11,-1)$, **(1 pont)**
tehát $2x+2y-7<0$ és $|2x+2y-7|=-(2x+2y-7)=-2x-2y+7$. **(1 pont)**
Hasonlóan észrevehető, hogy a második gyök alatt az $(x+y-5)^2$ szerepel, ezért

$$\sqrt{x^2+y^2-10x-10y+2xy+25}=\sqrt{(x+y-5)^2}=|x+y-5|. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $x \in (-3,-1)$ és $y \in (1,4)$, ezért $x+y-5 \in (-7,-2)$, **(1 pont)**
tehát $x+y-5<0$ és $|x+y-5|=-(x+y-5)=-x-y+5$. **(1 pont)**
Összegezve a számításainkat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\sqrt{4x^2+4y^2-28x-28y+8xy+49}-2\sqrt{x^2+y^2-10x-10y+2xy+25}\\&\quad=|2x+2y-7|-2|x+y-5|=(-2x-2y+7)-2(-x-y+5)\\&\quad=-2x-2y+7+2x+2y-10=-3,\end{aligned}$$

ami állandó, minden $x \in (-3,-1)$ és $y \in (1,4)$ esetén. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

Megjegyzés. A gyökök alatt a következőképpen is kialakítható teljes négyzet:

$$\begin{aligned}4x^2+4y^2-28x-28y+8xy+49&=(4x^2+4y^2+8xy)-28x-28y+49\\&=(2x+2y)^2-14(2x+2y)+7^2=(2x+2y-7)^2,\\x^2+y^2-10x-10y+2xy+25&=(x^2+y^2+2xy)-10x-10y+25\\&=(x+y)^2-10(x+y)+5^2=(x+y-5)^2.\end{aligned}$$

2. feladat (10 pont)**.** Legyen $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ és $x>1$. Igazold, hogy

$$\frac{x-\{x\}}{2021+\dfrac{1}{[x]}}+\frac{x-[x]}{2021+\dfrac{1}{\{x\}}} \geq \frac{x^2}{2021x+2},$$

ahol $[x]$ az x szám egészrésze és $\{x\}$ az x szám törtrésze! *Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad*
Matlap 2022/1 L: 3386

Megoldás. Mivel $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ és $x > 1$, ezért $\{x\} \in (0,1)$ és $[x] \geq 1 > 0$. A feladatban szereplő egyenlőtlenség rendre a következő ekvivalens alakokba írható:

$$\frac{[x]}{2021 + \frac{1}{[x]}} + \frac{\{x\}}{2021 + \frac{1}{\{x\}}} \geq \frac{x^2}{2021x+2},$$

$$\frac{[x]^2}{2021 \cdot [x] + 1} + \frac{\{x\}^2}{2021 \cdot \{x\} + 1} \geq \frac{x^2}{2021x+2}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$\frac{[x]^2}{2021 \cdot [x] + 1} + \frac{\{x\}^2}{2021 \cdot \{x\} + 1} \geq \frac{([x]+\{x\})^2}{(2021[x]+1)+(2021\{x\}+1)}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ha bevezetjük az $a = [x]$, $b = \{x\}$, $m = 2021[x]+1$, $n = 2021\{x\}+1$ jelöléseket, akkor $a, b, m, n > 0$ és az igazolandó egyenlőtlenség rendre ekvivalens a következőkkel:

$$\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$\frac{a^2n + b^2m}{m \cdot n} \geq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{m+n},$$

$$(a^2n + b^2m)(m+n) \geq (a^2 + 2ab + b^2)mn,$$

$$a^2mn + a^2n^2 + b^2m^2 + b^2mn \geq a^2mn + 2abmn + b^2mn,$$

$$a^2n^2 + b^2m^2 \geq 2abmn, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$a^2n^2 + b^2m^2 - 2abmn \geq 0,$$

$$(an - bm)^2 \geq 0, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

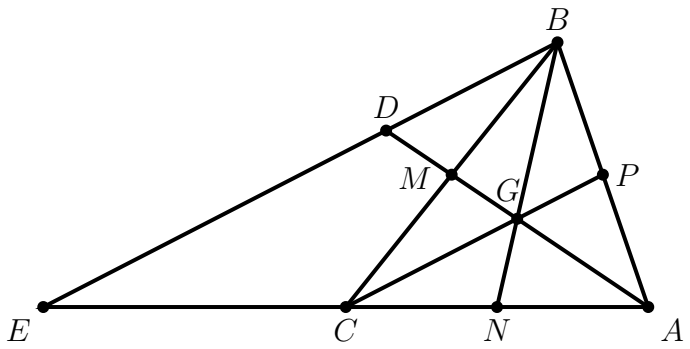
ami igaz minden $a, b, m, n > 0$ esetén.
Hivatalból **(1 pont)**
■

3. feladat (10 pont)**.** Legyen M, N és P rendre az ABC háromszög BC, AC és AB oldalának felezőpontja, G pedig a háromszög súlypontja. Legyen D a G pontnak az M szerinti szimmetrikusa, E pedig az A pontnak a C szerinti szimmetrikusa.

a) Igazold, hogy a B, D és E pontok kollineárisak!

b) Határozd meg az a és b valós számokat úgy, hogy $\overrightarrow{PD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$! *(***)*

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát.



a) A vizsgált B, D, E pontok pontosan akkor kollineárisak, ha a $\overrightarrow{BE}$ és $\overrightarrow{BD}$ vektorok kollineárisak.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{GM} && (M \text{ a } GD \text{ szakasz felezőpontja}) \\
&= \overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} && (G \text{ az } ABC \text{ háromszög súlypontja}) \quad \textbf{(1 pont)} \\
&= \overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) \\
&= \overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM}) && (M \text{ a } BC \text{ szakasz felezőpontja}) \quad \textbf{(1 pont)} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} && (M \text{ a } BC \text{ szakasz felezőpontja}) \\
&= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}). && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Mivel C az AE szakasz felezőpontja, ezért $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$, továbbá

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Azt kaptuk, hogy $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BD}$, ezért a $\overrightarrow{BE}$ és $\overrightarrow{BD}$ vektorok kollineárisak, amely egyenértékű a B, D, E pontok kollinearitásával. **(1 pont)**

b) Mivel az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok nem kollineárisak, ezért az a és b számok egyértelműen meghatározottak.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} && (\text{az a) alpont alapján } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}) \quad \textbf{(1 pont)} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}) && (\ C \text{ az } AE \text{ szakasz felezőpontja}) \quad \textbf{(1 pont)} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}. && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Tehát $a = \frac{1}{6}$ és $b = \frac{2}{3}$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás az a) alpontra. A G az ABC háromszög súlypontja, ezért $AG = 2GM$. **(1 pont)**
Továbbá, M a GD szakasz felezőpontja, tehát $GM = DM$, ahonnan $GD = 2GM$. Azt kaptuk, hogy $AG = GD$, vagyis a G az AD szakasz felezőpontja. **(1 pont)**
Másrészt a C pont az AE szakasz felezőpontja, ezért GC az ADE háromszög középvonala, ahonnan következik, hogy $GC \parallel DE$. **(1 pont)**
Az ABE háromszögben P az AB oldal, illetve C az AE oldal felezőpontja, ezért PC az ABE háromszög középvonala, tehát $PC \parallel BE$. **(1 pont)**
A BE és DE egyenesek az E ponton keresztül húzott párhuzamosok a PC egyenessel (és a vele egybeeső GC egyenessel). Innen következik, hogy a BE és DE egyenesek egybeesnek, vagyis a B, D, E pontok kollineárisak. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** a) Három szám esetén értelmezzük a következő eljárást: a három szám közül mindegyiket helyettesítjük a másik két szám számtani közepárányosával. A 2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ számokból kiindulva, és a keletkező számhármasokra tetszőlegesen sokszor megismételve az eljárást, megkaphatjuk-e az 1, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$ számokat?

b) Három szám esetén értelmezzük a következő eljárást: a három szám közül az egyiket változatlanul hagyjuk, a másik kettő helyett ezek összegének $\sqrt{2}$-vel való osztási hányadosát, illetve ezek különbségének $\sqrt{2}$-vel való osztási hányadosát írjuk. A 2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ számokból kiindulva, és a keletkező számhármasokra tetszőlegesen sokszor megismételve az eljárást, megkaphatjuk-e az 1, $\sqrt{2}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ számokat?

(***)

Megoldás. a) Ha a, b, c három tetszőleges szám, akkor az eljárás során a $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ számokat kapjuk. (**1 pont**)
A három szám összege invariáns:

$$\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az eredeti három szám összege $2+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=4$. Mivel a kért számok összege

$$1+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=5\neq 4,$$

ezért a válasz: nem. (**2 pont**)

b) Feltéve, hogy az a számot nem változtatjuk, az a, b, c számokból egy lépés után az a, $\frac{b+c}{\sqrt{2}}$, $\frac{b-c}{\sqrt{2}}$ számokat kapjuk. (**1 pont**)
Ebben az esetben az invariáns a három szám négyzetének összege:

$$a^2+\left(\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{b-c}{\sqrt{2}}\right)^2=a^2+b^2+c^2. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A kiinduló számoknál a négyzetösszeg $2^2+(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=10$, a kért számoknál pedig $1^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{7}{2}$, ami azt mutatja, hogy itt is nemleges a válasz. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Megjegyzés. Magyarázat nélküli nemleges válaszért nem jár pont egyik alpont esetén sem.

Második megoldás az a) alpontra. Ha a, b, c három tetszőleges szám, akkor az eljárás során a $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ számokat kapjuk. (**1 pont**)
Észrevehető, hogy tetszőleges a, b, c számok esetén

$$\min\{a,b,c\}\leq\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}\leq\max\{a,b,c\}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ebből következik, hogy az eljárások során kapható számok a $\min\{2,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}=1-\sqrt{2}$ és $\max\{2,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}=1+\sqrt{2}$ értékek között maradnak. (**1 pont**)
A végső számok közül $2+\sqrt{2}$ nincs az $1-\sqrt{2}$ és $1+\sqrt{2}$ között, ezért az 1, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$ számok nem kaphatók meg a megadott eljárással. (**1 pont**)

■