IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

X. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Ha a z_1 és z_2 komplex számok esetén $|z_1| = |z_2| = 1$, akkor igazoljuk, hogy

$$|z_1 + z_2 + z_1z_2| \leq \sqrt{5 + 2\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2)},$$

ahol $\mathrm{Re}\,(z)$ a z komplex szám valós részét jelöli! *(***)*

Matlap 2022/1 L: 3392

Megoldás. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív valós szám, négyzetre emelve mindkét oldalát az eredetivel egyenértékű

$$|z_1 + z_2 + z_1z_2|^2 \leq 5 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. **(1 pont)**

Tudjuk, hogy $|z|^2 = z\overline{z}$ és $2\,\mathrm{Re}\,(z) = z + \overline{z}$, bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén. A feladat feltételei alapján $z_1\overline{z}_1 = |z_1|^2 = 1$ és $z_2\overline{z}_2 = |z_2|^2 = 1$. Ezeket felhasználva a fenti egyenlőtlenség rendre a következő ekvivalens alakokba írható:

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2 + z_1z_2)(\overline{z_1 + z_2 + z_1z_2}) &\leq 5 + z_1 + z_2 + \overline{z_1 + z_2}, \\ (z_1 + z_2 + z_1z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_1\overline{z}_2) &\leq 5 + z_1 + z_2 + \overline{z}_1 + \overline{z}_2.\end{aligned}$$ **(2 pont)**

A baloldalon elvégezve a műveleteket és felhasználva a $z_1\overline{z}_1 = |z_1|^2 = 1$ és $z_2\overline{z}_2 = |z_2|^2 = 1$ összefüggéseket, a következő ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$1 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + 1 + \overline{z}_1 + z_2 + z_1 + 1 \leq 5 + z_1 + z_2 + \overline{z}_1 + \overline{z}_2.$$ **(3 pont)**

Ezt ekvivalens módon tovább alakítjuk:

$$\begin{aligned}z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 &\leq 2 = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2, \\ 0 &\leq z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1, \\ 0 &\leq (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = |z_1 - z_2|^2,\end{aligned}$$

ami igaz minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén. **(3 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív valós szám, négyzetre emelve mindkét oldalát az eredetivel egyenértékű

$$|z_1 + z_2 + z_1z_2|^2 \leq 5 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. **(1 pont)**

Felírjuk az egységmodulusú z_1 és z_2 komplex számokat trigonometrikus alakba:

$$z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 \quad \text{és} \quad z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2,$$

ahol $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$. Kiszámoljuk a fenti egyenlőtlenség két oldalát külön-külön:

$$5 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = 5 + 2\,\mathrm{Re}\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1 + \cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = 5 + 2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2), \quad \textbf{(2 pont)}$$

illetve

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2 + z_1z_2|^2 &= |(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)|^2 \\
&= |(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))|^2 \\
&= |(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos(\theta_1+\theta_2)) + i(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin(\theta_1+\theta_2))|^2 \\
&= (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos(\theta_1+\theta_2))^2 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin(\theta_1+\theta_2))^2 \qquad \textbf{(1 pont)} \\
&= \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2(\theta_1+\theta_2) + 2\cos\theta_1\cos\theta_2 + 2\cos\theta_1\cos(\theta_1+\theta_2) \\
&\quad + 2\cos\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2(\theta_1+\theta_2) + 2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\
&\quad + 2\sin\theta_1\sin(\theta_1+\theta_2) + 2\sin\theta_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\
&= 3 + 2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + 2(\cos\theta_1\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin\theta_1\sin(\theta_1+\theta_2)) \\
&\quad + 2(\cos\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin\theta_2\sin(\theta_1+\theta_2)) \qquad \textbf{(1 pont)} \\
&= 3 + 2\cos(\theta_1-\theta_2) + 2\cos\theta_2 + 2\cos\theta_1. \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

Így az igazolandó fenti egyenlőtlenség

$$\begin{aligned}
3 + 2\cos(\theta_1-\theta_2) + 2\cos\theta_1 + 2\cos\theta_2 &\le 5 + 2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \\
\iff 2\cos(\theta_1-\theta_2) &\le 2 \\
\iff \cos(\theta_1-\theta_2) &\le 1, \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

ami teljesül minden $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ esetén.
Hivatalból **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont)**.** Adottak az $a, b, c \in (1, +\infty)$ valós számok. Igazold, hogy

$$\log_{a^2bc} a + \log_{ab^2c} b + \log_{abc^2} c = \frac{3}{4}$$

akkor és csakis akkor, ha $a = b = c$. *(***)*

Megoldás. A feladatban szereplő logaritmusokat átírjuk 10-es alapú logaritmusokra:

$$A = \log_{a^2bc} a + \log_{ab^2c} b + \log_{abc^2} c = \frac{\lg a}{2\lg a + \lg b + \lg c} + \frac{\lg b}{\lg a + 2\lg b + \lg c} + \frac{\lg c}{\lg a + \lg b + 2\lg c}.$$

A nevezőkre bevezetjük az

$$x = 2\lg a + \lg b + \lg c, \quad y = \lg a + 2\lg b + \lg c, \quad z = \lg a + \lg b + 2\lg c$$

jelöléseket. Az $a, b, c \in (1, +\infty)$ feltétel miatt $\lg a, \lg b, \lg c > 0$ és így $x, y, z > 0$. **(2 pont)**
A fenti összefüggésekből kapjuk, hogy $\lg a + \lg b + \lg c = \frac{x+y+z}{4}$ és $\lg a = x - \frac{x+y+z}{4} = \frac{3x-y-z}{4}$, $\lg b = y - \frac{x+y+z}{4} = \frac{3y-x-z}{4}$, $\lg c = z - \frac{x+y+z}{4} = \frac{3z-x-y}{4}$. **(1 pont)**
Tehát

$$A = \frac{3x-y-z}{4x} + \frac{3y-x-z}{4y} + \frac{3z-x-y}{4z} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az $A=\frac{3}{4}$ egyenlőség rendre ekvivalens a következő egyenlőségekkel:

$$\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)=\frac{3}{4},$$
$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}=6. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Tudjuk, hogy $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\geq 2$, minden $u,v>0$ esetén, és egyenlőség csak $u=v$ esetben áll fenn. Ezért

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 2+2+2.$$

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $x=y=z$, vagyis $\lg a=\lg b=\lg c$, azaz $a=b=c$. Tehát $\log_{a^2bc} a+\log_{ab^2c} b+\log_{abc^2} c=\frac{3}{4}$ akkor és csakis akkor, ha $a=b=c$. **(3 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

Megjegyzés. Az $a=b=c$ esetben a $\log_{a^2bc} a+\log_{ab^2c} b+\log_{abc^2} c=\frac{3}{4}$ egyenlőség ellenőrzéséért csak 2 pont adható.

Második megoldás. A feladatban szereplő logaritmusokat átírjuk 10-es alapú logaritmusokra:

$$A=\log_{a^2bc} a+\log_{ab^2c} b+\log_{abc^2} c=\frac{\lg a}{2\lg a+\lg b+\lg c}+\frac{\lg b}{\lg a+2\lg b+\lg c}+\frac{\lg c}{\lg a+\lg b+2\lg c}.$$

Bevezetjük az $x=\lg a$, $y=\lg b$, $z=\lg c$ és $S=x+y+z$ jelöléseket. Az $a,b,c\in(1,+\infty)$ feltétel miatt $x,y,z,S>0$. **(2 pont)**

$$A=\frac{x}{S+x}+\frac{y}{S+y}+\frac{z}{S+z}=\frac{S+x-S}{S+x}+\frac{S+y-S}{S+y}+\frac{S+z-S}{S+z}$$
$$=3-\left(\frac{S}{S+x}+\frac{S}{S+y}+\frac{S}{S+z}\right). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A számtani-harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség alapján, rendre az alábbi ekvivalens egyenlőtlenségeket írhatjuk:

$$\frac{\frac{S}{S+x}+\frac{S}{S+y}+\frac{S}{S+z}}{3}\geq\frac{3}{\frac{S+x}{S}+\frac{S+y}{S}+\frac{S+z}{S}},$$
$$\frac{S}{S+x}+\frac{S}{S+y}+\frac{S}{S+z}\geq\frac{9S}{(S+x)+(S+y)+(S+z)},$$
$$\frac{S}{S+x}+\frac{S}{S+y}+\frac{S}{S+z}\geq\frac{9S}{4S},$$
$$\frac{S}{S+x}+\frac{S}{S+y}+\frac{S}{S+z}\geq\frac{9}{4}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

A fentiek alapján rendre kapjuk, hogy

$$\log_{a^2bc} a+\log_{ab^2c} b+\log_{abc^2} c\leq 3-\frac{9}{4},$$
$$\log_{a^2bc} a+\log_{ab^2c} b+\log_{abc^2} c\leq\frac{3}{4}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn egyenlőség, ha $S+x=S+y=S+z$, vagyis ha $a=b=c$. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

3. feladat (10 pont)**.** Adottak az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$ és $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 18}$ függvények.

a) Határozd meg az f és a g minimumának összegét!

b) Határozd meg a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x)$ függvény minimumát! Milyen x értékre veszi fel a h függvény a minimumát? *(***)*

Megoldás. a) Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 32} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 16} = \sqrt{(x-4)^2 + 16} \geq 4,$$
$$g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 18} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 9} = \sqrt{(x-3)^2 + 9} \geq 3, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ezért az f függvény minimuma $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(4) = 4$, és a g függvény minimuma $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = g(3) = 3$, ahonnan kapjuk, hogy a minimumok összege $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) + \min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = 7$. **(1 pont)**

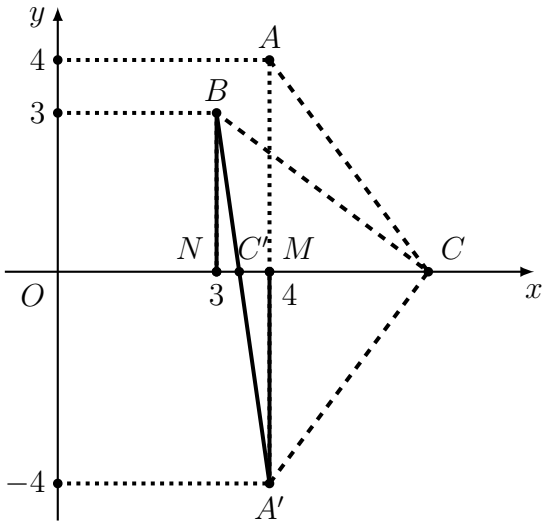
b) A függvényértékek kifejezhetők szakaszok hosszaként. Az $A(4,4)$, $B(3,3)$, $C(x,0)$ pontok esetén

$$f(x) + g(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (0-4)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (0-3)^2} = AC + BC. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A $C(x,0)$ az Ox tengelyen mozog, így $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} (f(x) + g(x)) = \min\limits_{C\in Ox} (AC + BC)$. Legyen $A'(4,-4)$ az $A(4,4)$ pont Ox tengely szerinti szimmetrikusa. Ekkor $AC + BC = A'C + BC$, $\forall C \in Ox$. **(1 pont)** Ez utóbbi összeg pontosan akkor minimális, ha a C pont egybeesik az Ox tengely és az $A'B$ szakasz C' metszéspontjával, a keresett minimum pedig az $A'B$ szakasz hossza:

$$\min_{x\in\mathbb{R}} (f(x) + g(x)) = \min_{C\in Ox} (AC + BC) = \min_{C\in Ox} (A'C + BC) = A'C' + C'B = A'B$$
$$= \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $C'(c',0)$, akkor a h függvény a minimumát az $x = c'$ értékre veszi fel. Legyen $M(4,0)$ az $A(4,4)$ pont, illetve $N(3,0)$ a $B(3,3)$ pont vetülete az Ox tengelyre. A $C'MA'$ és $C'NB$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy $\frac{C'M}{C'N} = \frac{MA'}{NB}$, ahonnan $\frac{4-c'}{c'-3} = \frac{4}{3}$, tehát $c' = \frac{24}{7}$. Azt kaptuk, hogy $C'(\frac{24}{7}, 0)$ és a h függvény az $x = \frac{24}{7}$ értékre lesz minimális. **(2 pont)**



Hivatalból **(1 pont)**

■

Megjegyzés. A megoldás rövidíthető, ha az $A(4,-4)$, $B(3,3)$ és $C(x,0)$ pontokból indulunk ki, így elkerülhető a szimmetrikus szerkesztése.

Megjegyzés. Az A' pont helyett vehettük volna a $B(3,3)$ pontnak Ox tengely szerinti $B'(3,-3)$ szimmetrikusát. Ekkor minden C pontra az Ox tengelyen $BC+CA=B'C+CA$, és ez az összeg akkor minimális, ha a C pont egybeesik az Ox tengely és $B'A$ szakasz C' metszéspontjával (amely megegyezik az $A'B$ szakasz és az Ox tengely metszéspontjával).

4. feladat (10 pont)**.** Adott az n természetes szám, amely nem osztható se 2-vel, se 5-tel. Igazold, hogy létezik az n számnak olyan többszöröse, amely csak 1-es számjegyekből áll! *(***)*

Megoldás. Tekintsünk az

$$a_1=1,\quad a_2=11,\quad \ldots,\quad a_{n+1}=\underbrace{11\ldots11}_{(n+1)\text{ db. 1-es}}$$

számokat. Mivel az n-nel való lehetséges osztási maradékok száma n, ezért a skatulyaelv alapján az $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}$ számok közül létezik kettő, amelynek megegyezik az n-nel való osztási maradéka. (**3 pont**)

Legyen ez a két szám a_i és a_j, ahol $i<j$. Ekkor az

$$a_j-a_i=\underbrace{1\ldots1}_{j-i}\underbrace{1\ldots1}_{i}-\underbrace{1\ldots1}_{i}=\underbrace{1\ldots1}_{j-i}\underbrace{0\ldots0}_{i}=a_{j-i}\cdot10^i$$

szám osztható n-nel. (**3 pont**)
A megadott n nem osztható se 2-vel, se 5-tel, ezért n és 10^i relatív prímek. (**1 pont**)
Mivel $n\mid a_{j-i}\cdot10^i$, valamint n és 10^i relatív prímek, ezért $n\mid a_{j-i}$. Tehát a_{j-i} az n egy olyan többszöröse, amely csak 1-es számjegyekből áll. (**2 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)
■