IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

XII. osztály

1. feladat (10 pont). Adott a $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C}, A^{2022} = I_2 \right\}$ halmaz.

a) Bizonyítsd be, hogy G zárt részhalmaza az $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ halmaznak a mátrixok szorzására nézve!
b) Bizonyítsd be, hogy $(G, \cdot)$ Abel-csoport!
c) Határozd meg a G elemeinek a számát! *(***)*

Megoldás. a) Tekintsük az $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mátrixokat. Mivel

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & 0 \\ 0 & db \end{pmatrix},$$

ezért $AB = BA$. **(1 pont)**
Innen következik, hogy $(AB)^{2022} = A^{2022}B^{2022} = I_2$, vagyis $AB \in G$ és így G zárt részhalmaza $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$-nek a mátrixok szorzására nézve. **(1 pont)**

b) *Asszociativitás.* Mivel a mátrixok szorzása asszociatív az $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ halmazon, ezért annak bármely részhalmazán is az. **(1 pont)**
Semleges elem. Mivel $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $I_2^{2022} = I_2$, ezért $I_2 \in G$, tehát I_2 semleges elem a szorzásra nézve a G halmazban is. **(1 pont)**
Invertálhatóság. Ha $A \in G$, akkor az $A^{2022} = I_2$ összefüggés alapján

$$A^{2021} \cdot A = A \cdot A^{2021} = I_2,$$

tehát A invertálható $\mathcal{M}_2(C)$-ben és $A^{-1} = A^{2021}$. Másrészt, mivel G zárt a szorzásra nézve, így $A^{2021} \in G$. Tehát minden elem invertálható G-ben. **(1 pont)**
Kommutativitás. Következik az a) alpont bizonyításából.
Az előbbiekben bizonyított tulajdonságok alapján $(G, \cdot)$ Abel-csoport. **(1 pont)**

c) Legyen $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tetszőleges mátrix. A G halmaz értelmezése alapján $A \in G$ pontosan akkor teljesül, ha

$$I_2 = A^{2022} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{2022} = \begin{pmatrix} a^{2022} & 0 \\ 0 & b^{2022} \end{pmatrix},$$

vagyis ha $a^{2022} = 1$ és $b^{2022} = 1$. **(1 pont)**
Mivel az $x^{2022} = 1$ egyenletnek pontosan 2022 különböző megoldása van $\mathbb{C}$-ben, innen következik, hogy a G elemeinek száma $2022 \cdot 2022 = 2022^2$. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**
■

Megjegyzés. Az a) és b) alpontok megoldása leírható rövidebben, ha felhasználjuk a következő két tulajdonságot:

1. A $GL_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$ halmaz a mátrixok szorzására nézve csoportot alkot.
2. Legyen $(H, \cdot)$ csoport és G részhalmaza H-nak. A $(G, \cdot)$ pontosan akkor részcsoportja $(H, \cdot)$-nak, ha $G \neq \emptyset$ és minden $x, y \in G$ esetén $xy^{-1} \in G$.

Ezeket a tulajdonságokat felhasználva, elégséges a következőket belátni: $G \subseteq GL_2(\mathbb{C})$; $I_2 \in G$; minden $x, y \in G$ esetén $xy^{-1} \in G$, valamint a szorzás kommutatív G-ben.

2. feladat (10 pont)**.** Számítsd ki az

$$\int \frac{5e^x - 1}{2e^{2x} - 3e^x + 1}\,\mathrm{d}x$$

integrált, tudva azt, hogy $x > 0$. *Matlap 10/2021 L: 3385*

Első megoldás. $\mathcal{I}$-vel jelölve a feladatban szereplő integrált, az $e^x = t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ helyettesítés alapján **(2 pont)**

$$\mathcal{I} = \int \frac{5t - 1}{2t^2 - 3t + 1} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{5t - 1}{(2t - 1)(t - 1)t}\,\mathrm{d}t. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az elemi törtek összegére való bontás után az

$$\mathcal{I} = \int \frac{4}{t - 1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{6}{2t - 1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(3 pont)}$$

összefüggést kapjuk, tehát

$$\mathcal{I} = 4\ln|t - 1| - 3\ln|2t - 1| - \ln|t| + \mathcal{C}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $t = e^x$ és $x > 0$, innen az

$$\mathcal{I} = 4\ln(e^x - 1) - 3\ln(2e^x - 1) - x + \mathcal{C}$$

eredményhez jutunk. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

Második megoldás. A következő átalakításokat végezhetjük el:

$$\begin{aligned}
\int \frac{5e^x - 1}{2e^{2x} - 3e^x + 1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{5e^x - 1}{(2e^x - 1)(e^x - 1)}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int \frac{1}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{2e^x - 1}\,\mathrm{d}x && \textbf{(3 pont)} \\
&= 3\int \frac{2e^x - 1}{2e^x - 1}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{2e^x}{2e^x - 1}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - 4\int \frac{e^x - 1}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{e^x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x && \textbf{(3 pont)} \\
&= 3x - 3\ln|2e^x - 1| - 4x + 4\ln|e^x - 1| + \mathcal{C} && \textbf{(2 pont)} \\
&= 4\ln(e^x - 1) - 3\ln(2e^x - 1) - x + \mathcal{C}. && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Hivatalból **(1 pont)**
■

3. feladat (10 pont)**.** Az $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan csökkenő, Rolle-tulajdonságú (azaz folytonos $[0,a]$-n és deriválható $(0,a)$-n), valamint $f(a)=0$. Bizonyítsd be, hogy a $g\colon [0,a) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$$

függvény nem korlátos! *András Szilárd, Kolozsvár*

Megoldás. Tekintsük a $h\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^n \cdot f(x)$ függvényt, ahol $n \geq 1$ természetes szám. (**1 pont**)

A h függvény Rolle-tulajdonságú, mivel f is az, valamint $h(0) = h(a) = 0$, azaz a Rolle-tétel feltételei teljesülnek. (**2 pont**)

Így létezik olyan $c_n \in (0,a)$, amelyre $h'(c_n) = 0$. (**1 pont**)

Viszont $h'(x) = nx^{n-1}f(x) + x^n f'(x)$, ezért

$$h'(c_n) = nc_n^{n-1}f(c_n) + c_n^n f'(c_n) = 0. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Innen következik, hogy $\dfrac{c_n f'(c_n)}{f(c_n)} = -n$. (**1 pont**)

Mivel n tetszőleges, ezért minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $g(c_n) = -n$, és így a g függvény nem korlátos. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Megjegyzés. 1. Honnan jöhet a h függvény ötlete? Mivel f szigorúan csökkenő és deriválható a $(0,a)$ intervallumon, ezért $f'(x) \leq 0$ minden $x \in (0,a)$ esetén. Így az $f(a) = 0$ alapján $f(x) > 0$ minden $x \in [0,a)$ esetén. Tehát a g függvény jól értelmezett és negatív értékeket vesz fel, ezért azt kellene igazolni, hogy tetszőlegesen kicsi értékeket is felvesz.

Ha $g(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)} = -\alpha$, ahol $\alpha > 0$, akkor $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\alpha}{x}$, azaz $\big(\ln f(x)\big)' = -\alpha(\ln x)'$, vagyis $\big(\ln(f(x)) + \alpha \ln x\big)' = 0$, és így $\big(\ln(f(x) \cdot x^\alpha)\big)' = 0, \quad \forall x \in (0,\alpha)$.

Emiatt az $y = \ln\big(f(x)\cdot x^\alpha\big)$ függvényre kellene így alkalmazni a Rolle-tételt, csak ez a függvény a $[0,a]$ intervallum végpontjaiban nem értelmezett. Ez a probléma feloldható, mivel a $\big(\ln(f(x) \cdot x^\alpha)\big)' = 0$ összefüggésből következik, hogy $\ln(f(x) \cdot x^\alpha)$ állandó, és ez pontosan akkor teljesül, ha $f(x) \cdot x^\alpha$ állandó. Ezért a $h\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^n \cdot f(x)$ függvényt választjuk.

2. Végtelen sok ilyen f függvény létezik. Például, az $f_k\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = e^{ka} - e^{kx}$ függvény ilyen, minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén.

4. feladat (10 pont)**.** A Terc játék egy speciális logikai kártyajáték. A játékot alkotó 81 darab kártya mindegyikének 4 tulajdonsága van: *háttérszín* (fekete, fehér vagy narancssárga); *figuraszín* (piros, kék vagy zöld); *figuraszám* (egy, kettő vagy három); *figuraforma* (háromszög, trapéz vagy félkör).

Három kártya akkor alkot *tercet*, ha mind a négyféle tulajdonságra külön-külön igaz, hogy az vagy minden kártyán azonos, vagy minden kártyán különböző. Például, a fehér-piros-egy-félkör, fehér-kék-három-félkör, fehér-zöld-kettő-félkör tulajdonságokkal rendelkező kártyák tercet alkotnak, viszont két fehér és egy fekete háttérszínű kártya nem alkot tercet.

A 81 kártya segítségével maximum hány különböző tercet alkothatunk, ha

a) egy kártyát legfennebb egyszer használhatunk fel?

b) egy kártyát többször is felhasználhatunk? *Zsombori Gabriella, Csíkszereda*

Megoldás. a) Ha egy kártyát legfennebb egyszer használhatunk fel terc kialakítására, akkor a 81 kártyában legfennebb $\frac{81}{3} = 27$ darab terc lehet. **(1 pont)**
A 27 terc létre is jön, például a következő módon. Helyezzük egy-egy kupacba az azonos háttérszínű, figuraszínű és figuraszámú kártyákat. Ezáltal 27 darab, három kártyából álló kupacot kapunk. Az egy kupacban szereplő kártyák tercet alkotnak, mivel három tulajdonságuk megegyezik, a negyedik pedig minden kártyán különböző. **(2 pont)**

b) Ha a 81 kártya közül tetszőlegesen kiválasztunk két kártyát, akkor ezek egyértelműen meghatározzák a harmadikat, amivel tercet alkotnak. **(2 pont)**
Két kártyát a 81 közül $C_{81}^2 = \frac{80 \cdot 81}{2} = 3240$ módon választhatunk ki. **(2 pont)**
Így minden tercet háromszor számoltunk meg. Valóban, az $\{a, b, c\}$ kártyákból alkotott tercet megszámoltuk az $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ és $\{a, c\}$ párok esetén is. Ezért a maximálisan kialakítható tercek száma $\frac{C_{81}^2}{3} = \frac{3240}{3} = 1080$. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás a b) alpontra. Bevezetünk egy kódolást: minden kártyát egy rendezett számnégyessel jellemzünk – (háttérszín, figuraszín, figuraszám, figuraforma) –, a következő táblázat szerint:

	háttérszín	**figuraszín**	**figuraszám**	**figuraforma**
0	fekete	piros	egy	háromszög
1	fehér	kék	kettő	trapéz
2	narancssárga	zöld	három	félkör

(1 pont)

Ekkor például a $(0, 0, 0, 0)$-ás kártyának a háttérszíne fekete, figuraszíne piros, figuraszáma egy és figuraformája háromszög. A kódolásból következik, hogy három kártya pontosan akkor alkot tercet, ha leírva őket a kódokkal egymás alá, mind a négy keletkezett oszlopban a

0	1	2	0	0	1	1	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	2	1	2	0	1	0

konfigurációk valamelyike jelenik meg. Ez összesen $9^4 = 6561$ esetet jelent. **(2 pont)**
Ezekből ki kell vonjuk azokat az eseteket, amelyek kizárólag a

0	1	2
0	1	2
0	1	2

oszlopokból állnak, mivel azok egyforma kártyákat eredményeznének, és ez nem lehetséges (a pakliban nincs két egyforma kártya). Ez $3^4 = 81$ esetet jelent. **(1 pont)**
Tehát eddig $9^4 - 3^4 = 6480$ tercet számoltunk össze, viszont a kártyák sorrendjét is figyelembe vettük. Ez azt jelenti, hogy minden tercet 6-szor számoltunk meg, mivel három kártyát $3! = 6$ féleképpen tudunk sorba rendezni. Ezért maximum

$$\frac{9^4 - 3^4}{6} = \frac{6480}{6} = 1080$$

terc hozható létre. **(2 pont)**

■