IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

VIII. osztály

1. feladat. Adott az $a = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ kifejezés.

a) Határozd meg az a^2 értékét!

b) Számítsd ki a $(2\sqrt{5}-1-a)^{2022}$ kifejezés értékét!

c) Igazold, hogy $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^x + \left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^x \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$.

2. feladat.

a) Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2xy + 10x - 3y = 21.$$

b) Határozd meg az

$$E(x,y) = \sqrt{x^2-8x+20} + \sqrt{y^2+4y+13}, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

kifejezés minimális értékét, valamint azon x és y számokat, amelyekre a kifejezés értéke egyenlő a minimumával!

3. feladat. Adott egy $ABCD$ téglalap, ahol $AB = a\sqrt{3}$ és $BC = a$. Legyen P egy pont a téglalap síkján kívül úgy, hogy $PA = 2a$. Ha AE és AF oldalfelezők az ADP, illetve ABP háromszögben, valamint AG a $\widehat{PAC}$ szögfelezője, ahol $G \in PC$, akkor igazold, hogy $(EFG) \parallel (ABC)$.

4. feladat. Két tanulónak 8 különböző könyvet osztunk szét.

a) Hányféleképpen oszthatjuk szét a könyveket?

b) Hányféleképpen oszthatjuk szét a könyveket úgy, hogy mindkét tanuló kapjon legalább egy könyvet?

c) Hányféleképpen oszthatjuk szét a könyveket úgy, hogy mindkét tanuló kapjon legalább két könyvet?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.