IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

IX. osztály

1. feladat. Igazold, hogy az $x \in (-3,-1)$ és $y \in (1,4)$ valós számok esetén a

$$\sqrt{4x^2+4y^2-28x-28y+8xy+49}-2\sqrt{x^2+y^2-10x-10y+2xy+25}$$

kifejezés állandó!

2. feladat. Legyen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ és $x > 1$. Igazold, hogy

$$\frac{x-\{x\}}{2021+\dfrac{1}{[x]}}+\frac{x-[x]}{2021+\dfrac{1}{\{x\}}} \geq \frac{x^2}{2021x+2},$$

ahol $[x]$ az x szám egészrésze és $\{x\}$ az x szám törtrésze!

3. feladat. Legyen M, N és P rendre az ABC háromszög BC, AC és AB oldalának felezőpontja, G pedig a háromszög súlypontja. Legyen D a G pontnak az M szerinti szimmetrikusa, E pedig az A pontnak a C szerinti szimmetrikusa.

a) Igazold, hogy a B, D és E pontok kollineárisak!

b) Határozd meg az a és b valós számokat úgy, hogy $\overrightarrow{PD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$!

4. feladat. a) Három szám esetén értelmezzük a következő eljárást: a három szám közül mindegyiket helyettesítjük a másik két szám számtani közepárányosával. A 2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ számokból kiindulva, és a keletkező számhármasokra tetszőlegesen sokszor megismételve az eljárást, megkaphatjuk-e az 1, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$ számokat?

b) Három szám esetén értelmezzük a következő eljárást: a három szám közül az egyiket változatlanul hagyjuk, a másik kettő helyett ezek összegének $\sqrt{2}$-vel való osztási hányadosát, illetve ezek különbségének $\sqrt{2}$-vel való osztási hányadosát írjuk. A 2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ számokból kiindulva, és a keletkező számhármasokra tetszőlegesen sokszor megismételve az eljárást, megkaphatjuk-e az 1, $\sqrt{2}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ számokat?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.