IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

X. osztály

1. feladat. Ha a z_1 és z_2 komplex számok esetén $|z_1| = |z_2| = 1$, akkor igazoljuk, hogy

$$|z_1 + z_2 + z_1 z_2| \leq \sqrt{5 + 2\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2)},$$

ahol $\mathrm{Re}\,(z)$ a z komplex szám valós részét jelöli!

2. feladat. Adottak az $a, b, c \in (1, +\infty)$ valós számok. Igazold, hogy

$$\log_{a^2bc} a + \log_{ab^2c} b + \log_{abc^2} c = \frac{3}{4}$$

akkor és csakis akkor, ha $a = b = c$.

3. feladat. Adottak az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$ és $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 18}$ függvények.

a) Határozd meg az f és a g minimumának összegét!

b) Határozd meg a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x)$ függvény minimumát! Milyen x értékre veszi fel a h függvény a minimumát?

4. feladat. Adott az n természetes szám, amely nem osztható se 2-vel, se 5-tel. Igazold, hogy létezik az n számnak olyan többszöröse, amely csak 1-es számjegyekből áll!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.