IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

XI. osztály

1. feladat. Adott az $A = \begin{pmatrix} 2 & 2022 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix.

a) Tudva, hogy $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és $B \cdot A = A \cdot B$, igazold, hogy $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú!

b) Oldd meg az $X^{2021} + X = A$ egyenletet az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazon!

2. feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat minden tagja pozitív és

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \ln \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot x_n$ határértéket!

3. feladat. A z_1, z_2, z_3 olyan páronként különböző komplex számok, amelyekre $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, valamint

$$\begin{vmatrix} \overline{z_1} & z_1^3 & z_1 \\ \overline{z_2} & z_2^3 & z_2 \\ \overline{z_3} & z_3^3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Igazold, hogy z_1, z_2, z_3 egy derékszögű háromszög csúcsainak affixumai!

4. feladat. Az Országos Diákszínjátszó Fesztivál versenyprogramjában tizenkét előadás ötféle díjért verseng: legjobb előadás, legjobb rendezés, legjobb alakítás, legjobb látványvilág, illetve a közönségdíj. Egy előadás akár mind az öt kategóriában nyerhet, viszont minden kategóriában csak egy előadás győz.

a) Hányféleképpen ítélheti oda a zsűri a díjakat?

b) Hányféleképpen ítélheti oda a zsűri a díjakat, ha a díjak között nem teszünk különbséget, csak azt vesszük figyelembe, hogy az előadások hány díjat kaptak?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.