IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

XII. osztály

1. feladat. Adott a $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C}, A^{2022} = I_2 \right\}$ halmaz.

a) Bizonyítsd be, hogy G zárt részhalmaza az $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ halmaznak a mátrixok szorzására nézve!

b) Bizonyítsd be, hogy $(G, \cdot)$ Abel-csoport!

c) Határozd meg a G elemeinek a számát!

2. feladat. Számítsd ki az

$$\int \frac{5e^x - 1}{2e^{2x} - 3e^x + 1} \, \mathrm{d}x$$

integrált, tudva azt, hogy $x > 0$.

3. feladat. Az $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan csökkenő, Rolle-tulajdonságú (azaz folytonos $[0, a]$-n és deriválható $(0, a)$-n), valamint $f(a) = 0$. Bizonyítsd be, hogy a $g\colon [0, a) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$$

függvény nem korlátos!

4. feladat. A Terc játék egy speciális logikai kártyajáték. A játékot alkotó 81 darab kártya mindegyikének 4 tulajdonsága van: *háttérszín* (fekete, fehér vagy narancssárga); *figuraszín* (piros, kék vagy zöld); *figuraszám* (egy, kettő vagy három); *figuraforma* (háromszög, trapéz vagy félkör).

Három kártya akkor alkot *tercet*, ha mind a négyféle tulajdonságra külön-külön igaz, hogy az vagy minden kártyán azonos, vagy minden kártyán különböző. Például, a fehér-piros-egy-félkör, fehér-kék-három-félkör, fehér-zöld-kettő-félkör tulajdonságokkal rendelkező kártyák tercet alkotnak, viszont két fehér és egy fekete háttérszínű kártya nem alkot tercet.

A 81 kártya segítségével maximum hány különböző tercet alkothatunk, ha

a) egy kártyát legfennebb egyszer használhatunk fel?

b) egy kártyát többször is felhasználhatunk?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.