

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**30 ianuarie 2016**  
**BAREM**  
**CLASA A IX-A**

<b>1.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	$x \in [-3, 1] \Rightarrow 0 \leq x+3 \leq 4 \Rightarrow  x+3  = x+3, -4 \leq x-1 \leq 0 \Rightarrow  x-1  = -x+1$	<b>2p</b>
	$x \in [-3, 1] \text{ și } x-2y+3=0 \Rightarrow y = \frac{x+3}{2} \in [0, 2]$	<b>1p</b>
	$K = \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4}$	<b>1p</b>
	$K = \sqrt{(x+3)^2 + \left(\frac{x+3}{2}\right)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$	<b>1p</b>
	$\Rightarrow K =  x+3  \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} +  x-1  \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} ( x+3  +  x-1 )$	<b>2p</b>
	$\Rightarrow K = \frac{\sqrt{5}}{2} (x+3 - x+1) = 2\sqrt{5}$	<b>1p</b>
	$\Rightarrow [K] = [2\sqrt{5}] = 4$	<b>1p</b>

  

<b>2.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	<b>a)</b> $\frac{2n}{a_n} = \frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{n+1}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{n}{a_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2} (x_{n-1} + x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$ de unde rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică	<b>2p</b>
	Rația progresiei este $r = x_2 - x_1 = \frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{14}{3} - 3 = \frac{5}{3}$	<b>1,5p</b>
	$x_n = x_1 + (n-1)r = 3 + (n-1)\frac{5}{3} = \frac{5n+4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	<b>1,5p</b>
	<b>b)</b> $x_n = \frac{5n+4}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_n = 2n+1 - \frac{n-1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n-1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-1 = 3k, k \in \mathbb{N}$ de unde obținem $n = 3k+1, k \in \mathbb{N}$	<b>3p</b>
	Subșirul cu termenii numere întregi este: $(y_k)_{k \geq 0}, y_k = x_{3k+1} = 5k+3, k \in \mathbb{N}$	<b>1p</b>

  

<b>3.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	<b>a)</b> $x = [x] + \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$ unde $\{x\} \in [0, 1)$ și $\{x+n\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$	<b>1p</b>
	$-\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} = -2 + \frac{1}{2}, \dots, -\frac{2015}{2} = -1008 + \frac{1}{2}$	<b>1p</b>
	$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \dots = f\left(-\frac{2015}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Suma cerută este: $1008 \cdot \frac{1}{2} = 504.$	<b>2p</b>

	<b>b)</b> $\frac{x+2}{3} = k, k \in N^* \Rightarrow x = 3k - 2$	<b>1p</b>
	Avem $\left\lceil \sqrt{\frac{3k-2+5}{3}} \right\rceil = k$ de unde obținem $\left\lceil \sqrt{k+1} \right\rceil = k$ și $k \leq \sqrt{k+1} < k+1$	<b>1p</b>
	$k \leq \sqrt{k+1} \Rightarrow k \in \left[ 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right], k \in N^* \Rightarrow k = 1 (1)$ $\sqrt{k+1} < k+1$ adevărat pentru orice $k > 0 (2)$	<b>2p</b>
	Din (1) și (2) rezultă că $S = \{1\}$ .	<b>1p</b>
<b>4.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	Fie $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$	<b>1p</b>
	<b>a)</b> Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AC}}{1+k}, \overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BC} + k \cdot \overrightarrow{BA}}{1+k}, \overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{CA} + k \cdot \overrightarrow{CB}}{1+k}$ de unde obținem: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}{1+k} + k \cdot \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}}{1+k} = \vec{0}$ condiția suficientă pentru ca segmentele $AM, BN$ și $CP$ să constituie laturile unui triunghi.	<b>3p</b>
	<b>b)</b> Analog cu punctul a) avem: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + k \cdot \overrightarrow{OC}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{OC} + k \cdot \overrightarrow{OA}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{1+k} = \frac{(1+k)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}{1+k} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$	<b>2p</b>
	<b>c)</b> Fie $G$ și $G'$ centrul de greutate al triunghiurilor $ABC$ și $MNP$ . Avem $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \\ \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG'} \end{array} \right\} \overset{b)}{=} \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'} \Rightarrow G = G'$	<b>3p</b>