CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

28 ianuarie 2017

BAREM

CLASA A X-A

(3 ore/săptămână)

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\left\|3-\sqrt{2}\right\|=3-\sqrt{2}$	**1p**
	$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\left\|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$	**1p**
	Deci $\sqrt{3}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\mathbf{3}$ și $3\in\mathbf{N}$	**2p**
	b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot.....\cdot\sqrt[2^n]{3}=3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{1}{8}}\cdot...\cdot3^{\frac{1}{2^n}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{2^n}}$	**2p**
	$(a_n)_{n\geq1}:a_n=\frac{1}{2^n}$ progresie geometrică cu $q=\frac{1}{2}$ și $a_1=\frac{1}{2}$	**1p**
	$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1, \forall n\in N^*$	**1p**
	$3^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}<3$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) Expresia devine $E=\frac{\log_{2016}x\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt[3]{z}}{\log_{2017}x\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt[3]{z}}$	**1p**
	Notăm $t=x\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt[3]{z}\Rightarrow\log_{2017}t=\frac{\log_{2016}t}{\log_{2016}2017}$	**2p**
	Atunci $E=\frac{\log_{2016}t}{\frac{\log_{2016}t}{\log_{2016}2017}}=\log_{2016}2017$, este independentă de valorile lui *x, y, z*	**1p**
	b) $\lg(x+2y)-2\lg2=\frac{1}{2}(\lg x+\lg y)\Leftrightarrow2\lg(x+2y)-4\lg2=\lg(xy)\Leftrightarrow$	**1p**
	$\lg\frac{(x+2y)^2}{16}-\lg(xy)=0\Leftrightarrow\lg\frac{(x+2y)^2}{16xy}=0$	**2p**
	pe de altă parte folosind relația din ipoteză avem $\frac{(x+2y)^2}{16xy}=\frac{x^2+4xy+4y^2}{16xy}=\frac{16xy}{16xy}=1\Leftrightarrow\lg\frac{(x+2y)^2}{16xy}=0$	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	$z \in C \Rightarrow z = x + iy,\ x, y \in R.$ Vom avea: $\left\|x + \frac{1}{2} + iy\right\|^2 + i \cdot \left\|x + i\left(y + \frac{1}{2}\right)\right\|^2 - (1+i) \cdot \|x + iy\|^2 - \frac{1}{4} \cdot (1+i) = x + iy$	**1p** **2p**
	Calculând modulele și ridicând la pătrat: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + i \cdot \left[x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2\right] - (1+i) \cdot \left(x^2 + y^2\right) - \frac{1}{4} \cdot (1+i) = x + iy$	**3p**
	Efectuând calculele obținem $x + iy = x + iy$ q.e.d	**3p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, \infty)$	**1p**
	$2 - x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-2, 1)$	**2p**
	$D = [-1, \infty) \cap (-2, 1) = [-1, 1)$	**1p**
	b) $f(0) = 2$ și $f(-1) = 1$	**2p**
	avem ecuația $m^2 - m + 2 = 0$	**1p**
	A= $\left\{\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}\right\}$	**2p**