CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

28 ianuarie 2017

BAREM

CLASA A IX-A

(4 ore/săptămână)

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	Se demonstrează prin inducție matematică: Verificare: pentru $n=1$ avem $\left[\sqrt{1}\right]=\frac{1\cdot\left(4\cdot 1^2-3\cdot 1+5\right)}{6}\Rightarrow 1=1$ pentru $n=2$ avem $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{4}\right]=\frac{2\cdot\left(4\cdot 2^2-3\cdot 2+5\right)}{6}\Rightarrow 1+1+1+2=5$	**2p**
	Demonstrăm: $P(k)\to P(k+1)$ adevărat, pentru $\forall k\in N^*$ $P(k)$: $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\ldots+\left[\sqrt{k^2}\right]=\frac{k\left(4k^2-3k+5\right)}{6}, \forall k\in N^*$, adevărat	**1p**
	$P(k+1)$: $\underbrace{\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\ldots+\left[\sqrt{k^2}\right]}_{P(k)}+\underbrace{\left[\sqrt{k^2+1}\right]+\ldots\left[\sqrt{k^2+2k}\right]+\left[\sqrt{(k+1)^2}\right]}_{2k+1 \text{ termeni}}=$ $=\frac{(k+1)\left(4(k+1)^2-3(k+1)+5\right)}{6}, \forall k\in N^*$	**1p**
	Cum $\left[\sqrt{k^2+1}\right]+\ldots\left[\sqrt{k^2+2k}\right]=k\cdot 2k$ și $\left[\sqrt{(k+1)^2}\right]=k+1$ obținem	**2p**
	$\frac{k\left(4k^2-3k+5\right)}{6}+k\cdot 2k+(k+1)=\frac{(k+1)\left(4(k+1)^2-3(k+1)+5\right)}{6}, \forall k\in N^*$	**1p**
	Cum $\frac{k\left(4k^2-3k+5\right)}{6}+k\cdot 2k+(k+1)=\frac{4k^3+9k^2+11k+6}{6}$ și $\frac{(k+1)\left(4(k+1)^2-3(k+1)+5\right)}{6}=\frac{4k^3+9k^2+11k+6}{6}$ $\Rightarrow P(k+1)$ adevărat, pentru $\forall k\in N^*$ de unde $\Rightarrow P(k)$ adevărat, pentru $\forall k\in N^*$	**2p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Notăm: $b+c-a=x$, $c+a-b=y$, $a+b-c=z$, $x,y,z>0$	**2p**
	Obținem: $a=\frac{y+z}{2}$, $b=\frac{x+z}{2}$, $c=\frac{x+y}{2}$	**2p**
	Înlocuind în ingalitatea de demonstrate obținem : $\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geq 3$	**2p**
	echivalent cu: $\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\geq 6$ Cum $x,y,z>0 \overset{m_a\geq m_g}{\Rightarrow} \frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2;\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2;\ \frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geq 2$ Însumând inegalitățile de mai sus, obținem inegalitaea cerută.	**3p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'},\ \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'},\ \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC'},$	**1p**
	AA' bisectoare $\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{A'B}{A'C + A'B} = \frac{AB}{AC + AB} \Rightarrow \frac{A'B}{BC} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow \overrightarrow{A'B} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{CB}$	**1p**
	BB' bisectoare $\Rightarrow \frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB' + B'C}{B'C} = \frac{AB + BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{B'C} = \frac{c+a}{a} \Rightarrow \overrightarrow{B'C} = \frac{a}{a+c}\overrightarrow{AC}$	**1p**
	CC' bisectoare $\Rightarrow \frac{AC'}{BC'} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC' + BC'}{BC'} = \frac{AC + BC}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC'} = \frac{b+a}{a} \Rightarrow \overrightarrow{BC'} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$	**1p**
	$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{b+c}\left[\overrightarrow{AB}(b+c) + c\overrightarrow{BC}\right]$ $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+c}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{a+c}\left[\overrightarrow{BC}(c+a) + a\overrightarrow{CA}\right]$ $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CB} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{a+b}\left[\overrightarrow{CB}(a+b) + a\overrightarrow{BA}\right]$	**3p**
	Înlocuind în relație, obținem egalitatea.	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) pentru $n = 1 \Rightarrow a_2 = 2 = 1 \cdot 2$ pentru $n = 2 \Rightarrow a_3 = 6 = 2 \cdot 3$	**2p**
	atunci se demonstrează prin inducţie că $a_n = (n-1) \cdot n,\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$	**2p**
	b) pentru orice $k = \overline{1,n}$ avem $\sqrt{4a_k + 1} = \sqrt{4k^2 - 4k + 1} = \lvert 2k - 1 \rvert = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}^*$	**2p**
	atunci $\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + ... + \sqrt{4a_n + 1} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$	**3p**