

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

## ETAPA LOCALĂ

28 ianuarie 2017

## BAREM

## CLASA A X-A

(4 ore/săptămână)

1.)	Din oficiu	1p
	Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\frac{1}{2017} \log_{2016} \frac{(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \dots (a_{2017} + a_1)}{a_1 a_2 \dots a_{2017}} \geq \log_{2016} 2 \Leftrightarrow$	3p
	$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \dots (a_{2017} + a_1) \geq 2^{2017} a_1 a_2 \dots a_{2017}$	2p
	Din inegalitatea mediilor avem: $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}, \frac{a_2 + a_3}{2} \geq \sqrt{a_2 a_3}, \dots, \frac{a_{2017} + a_1}{2} \geq \sqrt{a_{2017} a_1}$	2p
	Care, prin înmulțire dau relația de mai sus	1p
	Egalitatea are loc dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_{2017}$	1p
2.)	Din oficiu	1p
	a) Fie $a = x + i \cdot y$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ , $z$ este definit, dacă $a \neq 1 - 2i$ , deci $x \neq 1$ și $y \neq -2$	1p
	$z = \frac{x + (y+1)i}{(x-1) + (y+2)i} = \frac{x(x-1) + (y+1)(y+2) - (x+y+1)i}{(x-1)^2 + (y+2)^2}$	2p
	$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$	1p
	$M = \{a = x + i \cdot y \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, x + y + 1 = 0\}$ sau $M = \{x + i \cdot (-x-1) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$	1p
	b) $a \in M \Rightarrow x + y + 1 = 0$ $x \neq 1$ și $y \neq -2$ $ a  = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$	1p
	Rezolvând sistemul de ecuații obținem $x_1 = -2$ , $y_1 = 1$ respectiv $x_2 = 1$ $y_2 = -2$ care nu convine,	2p
	deci singura soluție este $a = -2 + i$	1p
3.)	Din oficiu	1p
	a) Fie A, B, C punctele în sistemul cartezian cu afixe $z_1, z_2, z_3$ . Având modulele egale cu 1, punctele se află pe cercul cu centru în origine și raza 1, deci afixul centrului cercului circumscris este punctul O, cu afix 0.	2p
	Centrul de greutate G are afixul $g = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{1}{3}$	1p

	Din $\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$ obținem că $h=3g=1$ , deci și punctul H ( ortocentrul triunghiului ) aparține cercului circumscris triunghiului, care este posibil numai dacă triunghiul este dreptunghic.	<b>2p</b>
	Fie $m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow BC$ diametru în cerc, deci O este mijlocul lui BC $\Rightarrow z_3 = -z_2$	<b>2p</b>
	b) Din $z_3 = -z_2$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Rightarrow z_1 = 1$ $z_1^{2017} + z_2^{2017} + z_3^{2017} = 1 + z_2^{2017} - z_2^{2017} = 1$	<b>2p</b>
	<b>Soluție alternativă pentru punctul a)</b> $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Rightarrow \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1 \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 1$ și din $\overline{z_1} \cdot z_1 =  z_1 ^2 = 1 \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ ș. a .m.d, deci $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$	<b>2p</b>
	Din $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = 1 - \frac{1}{z_3} \Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{1 - z_3}{-z_3} \Rightarrow \frac{1 - z_3}{z_1 z_2} = \frac{1 - z_3}{-z_3}$ de unde avem 2 situații	<b>1p</b>
	1° dacă $z_3 = 1$ , atunci din $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Rightarrow z_1 + z_2 = 0$	<b>1p</b>
	2° dacă $z_3 \neq 1 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = -z_3$ și din $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Rightarrow z_1 + z_2 = 1 + z_1 \cdot z_2 \Rightarrow (z_1 - 1)(z_2 - 1) = 0$ adică $z_1 = 1$ sau $z_2 = 1$	<b>1p</b>
	Deci unul dintre numere este egal cu 1, iar suma celorlalte două este egal cu 0. Fie de exemplu $z_1 = 1 \Rightarrow z_2 + z_3 = 0$ deci $z_3 = -z_2$ și O este mijlocul lui BC, unde A, B, C sunt punctele în sistemul cartezian cu afixe $z_1, z_2, z_3$ . BC fiind diametru în cercul circumscris triunghiului și A este un punct de pe cerc, rezultă că $m(\hat{A}) = 90^\circ$	<b>2p</b>

<b>4.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	a) Avem $f(x) = \underbrace{[x] + \{x\}}_{=x} - 2[x] = \{x\} - [x], \forall x \in \mathbb{R}$ .	<b>1p</b>
	Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel, ca $f(x_1) = f(x_2)$ . Atunci $\{x_1\} - \{x_2\} = [x_1] - [x_2] \in \mathbb{Z} (*)$ . Cum $\{x_1\}, \{x_2\} \in [0,1)$ , avem $\{x_1\} - \{x_2\} \in (-1,1)$ și conform (*) obținem $\{x_1\} - \{x_2\} = 0$ . Prin urmare avem $[x_1] - [x_2] = 0$ , deci $x_1 = x_2$ , adică $f$ funcția este injectivă.	<b>3p</b>
	Fie $y \in \mathbb{R}$ . Ecuația $f(x) = y, x \in \mathbb{R}$ se reduce la: $x - 2[x] = y \Rightarrow \{x\} - [x] = \{y\} + [y] \Rightarrow \{x\} - \{y\} = [x] + [y] \in \mathbb{Z}$ . Deoarece $[x] + [y] \in \mathbb{Z}$ obținem că $\{x\} = \{y\}$ , de unde $[x] = -[y]$ . Astfel ecuația $f(x) = y$ are soluția $x = \{y\} - [y]$ . Rezultă că $f$ este surjectivă.	<b>3p</b>
	b) $(f \circ f)(x) = x - 2[x] - 2[x - 2[x]] = x - 2[x] - 2([x] - 2[x]) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Prin urmare $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$	<b>2p</b>