CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

28 ianuarie 2017

BAREM

CLASA A XI-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $A_0A_4:\ x-2y=0$	**2p**
	b) A_n, B, C coliniare $\Leftrightarrow \Delta=\begin{vmatrix} n & \sqrt{n} & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow n-\sqrt{n}-6=0$	**2p**
	Notăm $\sqrt{n}=t\ge 0$ și obținem ecuația $t^2-t-6=0$ cu soluțiile: $t_1=-2<0$ (nu convine) și $t_2=3$ pentru care obținem soluția $n=9$.	**1p**
	c) $A_{\Delta A_nDE}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert=20 \Rightarrow \lvert\Delta\rvert=40$; (1)	**1p**
	$\Delta=\begin{vmatrix} n & \sqrt{n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=-4(n+\sqrt{n}-2)$ de unde $\lvert\Delta\rvert=4\lvert n+\sqrt{n}-2\rvert \overset{(1)}{\Rightarrow} \lvert n+\sqrt{n}-2\rvert=10$ cum $n+\sqrt{n}-2=(\sqrt{n}+2)(\sqrt{n}-1)>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ rezultă $\lvert n+\sqrt{n}-2\rvert=n+\sqrt{n}-2$	**2p**
	Obținem ecuația $n+\sqrt{n}-2=10$ de unde: $n+\sqrt{n}-12=0$ cu soluțiile: $\sqrt{n}=-4<0$ care nu convine și $\sqrt{n}=3$ de unde obținem soluția $n=9$.	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix} 1+2a+2b+2ab & 2(a+b+ab) \\ -(a+b+ab) & 1-a-b-ab \end{pmatrix}=$	**1p**
	$\begin{pmatrix} 1+2\left[(a+1)(b+1)-1\right] & 2\left[(a+1)(b+1)-1\right] \\ -\left[(a+1)(b+1)-1\right] & 1-\left[(a+1)(b+1)-1\right] \end{pmatrix}=X\left((a+1)(b+1)-1\right)$	**1p**
	b) Pe baza punctului a) avem $\left(X(a)\right)^2=X\left((a+1)^2-1\right)$, $\left(X(a)\right)^3=X\left((a+1)^3-1\right)$ Intuim că $\left(X(a)\right)^n=X\left((a+1)^n-1\right)$	**1p**
	Demonstrăm cu inducția matematică $\left(X(a)\right)^n=X\left((a+1)^n-1\right)=\begin{pmatrix} 1+2\left[(a+1)^n-1\right] & 2\left[(a+1)^n-1\right] \\ -\left[(a+1)^n-1\right] & 1-\left[(a+1)^n-1\right] \end{pmatrix}$	**2p**
	c) Observăm că $X(1)\cdot X(2)=X(2\cdot 3-1)$, $X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)=X(2\cdot 3\cdot 4-1)$ Intuim că $X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(n)=X\left((n+1)!-1\right)$	**1p**
	Demonstrăm cu inducția matematică	**2p**
	$X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(n)=X\left((n+1)!-1\right)\Rightarrow X\left((n+1)!-1\right)=X(t-1)$ Deci $t=(n+1)!$	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Fie $g(X)=g(Y)\Rightarrow f(g(X))=f(g(Y))$	**2p**
	Atunci avem $A\cdot g(X)+f(X)\cdot B=A\cdot g(Y)+f(Y)\cdot B$ de unde $f(X)\cdot B=f(Y)\cdot B$	**2p**
	Cum $B\cdot C=I_n$ înmulțim egalitatea la dreapta cu matricea C și avem: $f(X)\cdot B\cdot C=f(Y)\cdot B\cdot C\Rightarrow f(X)\cdot I_n=f(Y)\cdot I_n\Rightarrow f(X)=f(Y)$	**2p**
	Funcția f fiind injectivă din $f(X)=f(Y)$ obținem $X=Y$	**2p**
	Deci presupunând că $g(X)=g(Y)$ am obținut $X=Y$, adică funcția g este injectivă.	**1p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) dacă $n=0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+2\right)=0$	**1p**
	dacă $n=1\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-x+1)=-1$	**1p**
	dacă $n=2k+1,\ k\in\mathbf{N}\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x+1}{(2-x)^{2k}}=\dfrac{-1}{0_+}=-\infty$	**1p**
	dacă $n=2k+2,\ k\in\mathbf{N}\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x+1}{(2-x)^{2k+1}}=\dfrac{-1}{0}\Rightarrow l_s=-\infty,\ l_d=+\infty$ de unde rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$	**2p**
	b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+...+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a_1^x+a_2^x+...+a_p^x}{p}-1\right)^{\frac{1}{x}}=$	**1p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a_1^x+a_2^x+...+a_p^x-p}{p}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_1^x+a_2^x+...+a_p^x-p}{p}\cdot\frac{1}{x}}==e^{\frac{1}{p}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x-1}{x}+\frac{a_2^x-1}{x}+...+\frac{a_p^x-1}{x}\right)}=$	**2p**
	$=e^{\frac{1}{p}\left(\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_p\right)}=e^{\frac{1}{p}\ln a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_p}=\sqrt[p]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_p}$	**1p**