CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

28 ianuarie 2017

BAREM

CLASA A XII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $(2+i)*(2-i)=4-3i$	**1p**
	$(a,b)=(4,-3)$	**1p**
	b) $\exists e\in\mathbb{C}$, astfel încât $\forall x\in\mathbb{C}$ avem $x*e=e*x$	**1p**
	$x*e=x\Rightarrow e=1+i,\ \forall x\neq i$ $e*x=x\Rightarrow e=1+i,\ \forall x\neq i$ (sau verificarea comutativității)	**2p**
	Pentru $x=i$ se verifică relația $i*(1+i)=i$ Finalizare: $e=1+i,\ \forall x\in\mathbb{C}$	**1p**
	c) $i_2=i*i=i\cdot i-i(i+i)+i-1=i^2-2i^2+i-1=-1+2+i-1=i$ Utilizând inducția matematică se arată că $i_n=i,\ \forall n\in\mathbb{N}$ $i_{n+1}=i_n*i=i*i=i,\ \forall n\in\mathbb{N}$ Pentru $n=2017$ obținem $i_{2017}=i$	**1p** **1p** **1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) *f* este primitiva funcției $h_{p,q}$, dacă *f* este derivabilă pe domeniul de definiție și $f'(x)=h_{p,q}(x)$	**1p**
	f este derivabilă, fiind suma funcțiilor elementare	**1p**
	$f'(x)=h_{p,q}(x)\Rightarrow 2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}=p\cdot x+\frac{q}{\sqrt{x}}\Rightarrow p=2,q=\frac{1}{2}$	**2p**
	b) F este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)>0,\ \forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow F$ strict crescătoare (1)	**3p**
	$\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}\Rightarrow\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ (2)	**1p**
	Din (1) și (2) $\Rightarrow F\left(\sqrt{2}\right)<F\left(\sqrt[3]{3}\right)$	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $\int\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\cdot e^{arctgx}dx=\int e^{arctgx}dx+\int\frac{x}{x^2+1}\cdot e^{arctgx}dx=$	**1p**
	$=x\cdot e^{arctgx}-\int\frac{x}{x^2+1}\cdot e^{arctgx}dx+\int\frac{x}{x^2+1}\cdot e^{arctgx}dx=x\cdot e^{arctgx}+C$	**2p**

	b) $\int \frac{x\cdot\cos x}{\sin^2 x}dx = \int x\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}\right)' dx = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}dx$; (1)	**1p**
	$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{1-\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right\| + C$; (2)	**2p**
	$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (0,1)$ de unde $\cos x - 1 \in (-1,0)$ și $\cos x + 1 \in (1,2)$ Cum $\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} < 0$ obținem $\ln\left\|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right\| = \ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \ln tg^2\frac{x}{2} = 2\ln tg\frac{x}{2}$ (3)	**2p**
	Din (1), (2) și (3) obținem $\int \frac{x\cdot\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{x}{\sin x} + \ln tg\frac{x}{2} + C$	**1p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	$978\text{-}606\text{-}55\text{-}4725\text{-}4 \Rightarrow c_{13} = 4$	**1p**
	$c_1 = 9, c_2 = 8, \ldots, c_{12} = 5$	**2p**
	Calcularea lui A = 136	**2p**
	A mod 10 = 6	**2p**
	$c_{13} = 10 - A\bmod 10 = 4 \Rightarrow$	**1p**
	$\Rightarrow$ 978-606-55-4725-4 este un cod ISBN	**1p**