CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

28 ianuarie 2017

BAREM

CLASA A IX-A

(3 ore/săptămână)

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	$\div\, x,\ y,\ z,\ t \Rightarrow y = x + r,\ z = x + 2r,\ t = x + 3r$; (1)	**1p**
	$\div\div\, x-2,\ y-5,\ z-7,\ t-7$ cu primul termen $x-2 \neq 0$ și rația $q = \frac{y-5}{x-2} \neq 0$ de unde obținem $x \neq 2$ și $y \neq 5$	**1p**
	Din $(y-5)^2 = (x-2)(z-7),\ (z-7)^2 = (y-5)(t-7)$ și (1) obținem: $(x+r-5)^2 = (x-2)(x+2r-7), (x+2r-7)^2 = (x+r-5)(x+3r-7)$	**1p**
	$\begin{cases} r^2 - 6r + 11 = x \\ r^2 - 6r + 14 = 2x \end{cases}$	**2p**
	$x = 3,\ r = 2$ sau $x = 3,\ r = 4$	**2p**
	Pentru $x = 3,\ r = 2$ obținem numerele 3; 5; 7, 9 ; soluție care nu satisface condiția $y \neq 5$ Pentru $x = 3,\ r = 4$ obținem numerele 3; 7 ;11; 15; soluție care convine	**2p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Observăm că $\left[\frac{4x-2}{6}\right] = \left[\frac{2(2x-1)}{6}\right] = \left[\frac{2x-1}{3}\right]$ De unde ecuația devine $2 \cdot \left[\frac{2x-1}{3}\right] = \frac{5x-4}{3} \Leftrightarrow \left[\frac{2x-1}{3}\right] = \frac{5x-4}{6}$	**2p**
	Notăm $\frac{5x-4}{6} = k$, $k \in Z$ de unde obținem $x = \frac{6k+4}{5}$, $k \in Z$	**2p**
	din relația $k \leq \frac{2x-1}{3} < k+1$ înlocuind pe x și rezolvând inecuațiile obținem: $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$	**4p**
	și $x \in \left\{-\frac{14}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 2\right\}$	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) D este mijlocul laturii $[AC]$ rezultă că $MD \Rightarrow \overrightarrow{MD} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}}{2}$ (1)	**1p**
	din ipoteză avem $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB}$ (2)	**1p**
	din (1) şi (2) $\Rightarrow 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$ adică $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM}$ de unde obținem $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC}$	**2p**
	b) Avem $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ pentru că $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MD}$ (3)	**1p**

	dar $2\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$ $\left(D \text{ este mijlocul lui } [AC]\right) \Rightarrow \overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}(4)$	**1p**
	din (3) şi (4) $\Rightarrow \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}(5)$	**1p**
	dar $\overrightarrow{MA}+a\cdot\overrightarrow{MB}=b\cdot\overrightarrow{MD}$ şi înlocuind (5) $\Rightarrow \overrightarrow{MA}+a\cdot\overrightarrow{MB}=b\cdot\overrightarrow{MA}+b\cdot\overrightarrow{MB}$	**1p**
	atunci $(1-b)\cdot\overrightarrow{MA}+(a-b)\cdot\overrightarrow{MB}=\vec{0}$,iar $\overrightarrow{MA}$ si $\overrightarrow{MB}$ necoliniari $\Rightarrow a=b=1$	**1p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}\geq 0$	**1p**
	Aducând la același numitor obținem succesiv: $\frac{y(x+y)+x(x+y)-4xy}{xy(x+y)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-2xy}{xy(x+y)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}\geq 0$ adevărat pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$	**3p**
	b) Aplicăm inegalitatea de la subpunctul a) pentru perechile de numere pozitive *(x, y)*; *(y, z)*; *(z, x)* și obținem: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$; $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{y+z}$ și $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\geq\frac{4}{z+x}$	**3p**
	Adunând membru cu membru aceste inegalități obținem: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\geq\frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{4}{z+x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 4\cdot\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)$ Simplificând cu 2, obținem inegalitatea de demonstrat.	**2p**